Preprint typeset in JHEP style - PAPER VERSION

Algèbre et Géometrie 3: Variétés différentiables

Marcos Mariño

Département de Physique Théorique et Section de Mathématiques,
Université de Genève, Genève, CH-1211 Switzerland
marcos.marino@unige.ch

ABSTRACT: Polycopié du cours d'Algèbre et Géometrie 3, semestre de printemps.

Contents

1. Variétés différentiables

1.1 Définition de variété différentiable

Définition 1.1. Une *variété topologique* M de dimension n est un espace topologique Hausdorff tel que, pour tout $p \in M$, il y a un voisinage ouvert U de p qui est homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$:

$$\phi : U \to U' \subset \mathbb{R}^n, \qquad \phi \text{ homéomorphisme.} \tag{1.1}$$

On dit que (U, ϕ) est une *carte locale* de M. Si r^i sont les projections coordonnées dans $\mathbb{R}^n$, i.e.

$$\begin{aligned} r^i :&\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \\ &(a_1, \cdots, a_n) \mapsto a_i \end{aligned} \tag{1.2}$$

les n fonctions

$$x^i = r^i \circ \phi \tag{1.3}$$

sont dites les *fonctions coordonnées* dans la carte locale (U, ϕ). On écrira quelquefois

$$\phi = (x^1, \cdots, x^n). \tag{1.4}$$

Bien sûr, il peut avoit un autre voisinage ouvert V qui satisfait aussi cette condition, i.e. $p \in V$ et

$$\psi : V \to V' \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

On a donc le diagramme

$$\begin{tikzcd} & U \cap V \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ \phi(U \cap V) \arrow[rr, "\psi \circ \phi^{-1}"] & & \psi(U \cap V) \end{tikzcd} \tag{1.6}$$

i.e. comme ψ et ϕ sont des homéomorphismes, les applications

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V) \tag{1.7}$$

et

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V) \tag{1.8}$$

sont des homéomorphismes. On les appelle *changements de carte* ou *changements de coordonnées.*

On veut avoir la possibilité de faire du calcul différentiel sur les variétés topologiques, donc on va introduire maintenant des conditions de differentiabilité.

Définition 1.2. Soient (U, ϕ) et (V, ψ) deux cartes locales sur une variété topologique. On dit que ces deux cartes sont C^k*-compatibles* si, quand $U \cap V \neq \emptyset$, les fonctions

$$\psi \circ \phi^{-1} \quad \text{et} \quad \phi \circ \psi^{-1} \tag{1.9}$$

sont de classe C^k, i.e. elle sont des difféomorphismes de classe C^k entre les ouverts $\phi(U \cap V)$ et $\psi(U \cap V)$ de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.3. Une *structure différentiable de classe* C^k sur une variété topologique M de dimension n est une collection de cartes locales de M,

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A} \tag{1.10}$$

qui satisfont les conditions suivantes

1. $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ i.e. chaque point $p \in M$ appartient à un ouvert de $\mathcal{A}$.

2. Pour tous les $\alpha, \beta \in A$, les cartes (U_α, ϕ_α) et (U_β, ϕ_β) sont C^k-compatibles. Cela veut dire, donc, que si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, l'application

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \tag{1.11}$$

est différentiable de classe C^k (donc elle est un difféomorphisme de classe C^k).

3. Si (U,ϕ) est une carte locale de M compatible avec toutes les (U_α, ϕ_α), elle appartient à $\mathcal{A}$. Cela veut dire que la famille $\mathcal{A}$ est *maximale* par rapport à la condition (2), et elle n'est pas contenue de façon stricte dans une autre collection de cartes locales qui a une carte locale en commun avec elle.

Définition 1.4. Une *variété différentiable* M de dimension n est un pair $(M,\mathcal{A})$ formé d'une variété topologique de dimension n et d'une structure différentiable $\mathcal{A}$ de classe C^k.

En fait, dans la définition de structure différentiable de classe C^k, les propriétés les plus importantes sont (1) et (2). On définit donc

Définition 1.5. Un *atlas de classe* C^k sur une variété topologique de dimension n est une collection de cartes locales (U_α, ϕ_α) qui satisfont les conditions (1) et (2).

La raison est que, comme on peut prouver facilement, tout atlas de classe C^k définit de façon *unique* une structure différentiable, et on a la proposition suivante

Proposition 1.6. Si $\mathcal{A}$ est un atlas de classe C^k sur une variété topologique de dimension n, il *existe* une structure différentiable *unique* de classe C^k, $\mathcal{A}_0$, tel que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0$

La preuve de cette proposition n'est pas difficile. On définit tout simplement $\mathcal{A}_0$ comme l'ensemble de cartes locales (U,ϕ) qui vérifient la propriété (3). Pour les détails de la preuve, voir par exemple [1], Th. 1.3.

Donc, pour construire une variété différentiable, il suffit de trouver un atlas. On va supposer à partir de maintenant que $k=\infty$.

1.2 Exemples

On va donner maintenant plusieurs exemples de variétés différentiables.

Exemple 1.7. $\mathbb{R}^n$ est un espace topologique Hausdorff. On considère l'application identité

$$i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \tag{1.12}$$

Elle vérifie trivialement les conditions pour un atlas. La structure différentiable $\mathcal{A}_0$ définie par l'atlas

$$\{(\mathbb{R}^n, i)\} \tag{1.13}$$

est la *structure différentiable usuelle* de $\mathbb{R}^n$. C'est évident qu'une carte locale (U,ϕ) appartient à $\mathcal{A}_0$ si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et ϕ est un difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ (on va voir des exemples de cela dans les exercices).

Exemple 1.8. Le cercle $\mathbb{S}^1$. On définit le cercle (de rayon unité) comme le sous-espace

$$\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}. \tag{1.14}$$

Il est évidemment Hausdorff. Notez qu'on ne peut pas le couvrir avec une seule carte, car il est compact et donc il ne peut pas être homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On va maintenant montrer

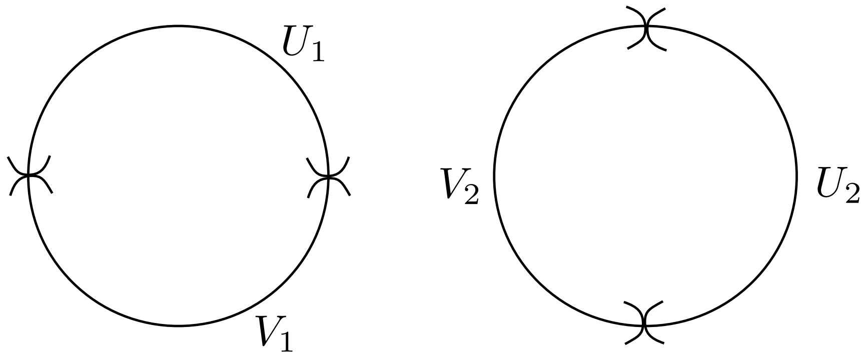

Figure 1: Les ouverts pour l'atlas de $\mathbb{S}^1$.

qu'il est une variété différentiable de dimension 1, en construisant un atlas de façon explicite. On définit donc les ouverts en $\mathbb{S}^1$,

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : y > 0\}, \\ U_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : x > 0\}, \\ V_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : y < 0\}, \\ V_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : x < 0\}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

On voit très bien que $\mathbb{S}^1 = U_1 \cup U_2 \cup V_1 \cup V_2$. Les homéomorphismes sont:

$$\begin{aligned} &\phi_1 : U_1 \to (-1, 1) \subset \mathbb{R}, \\ &\phi_1(x, y) = x, \qquad \phi_1^{-1}(x) = (x, \sqrt{1 - x^2}) \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} &\phi_2 : U_2 \to (-1, 1) \subset \mathbb{R}, \\ &\phi_2(x, y) = y, \qquad \phi_2^{-1}(y) = (\sqrt{1 - y^2}, y) \end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} &\psi_1 : V_1 \to (-1, 1) \subset \mathbb{R}, \\ &\psi_1(x, y) = x, \qquad \psi_1^{-1}(x) = (x, -\sqrt{1 - x^2}) \end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned} &\psi_2 : V_2 \to (-1, 1) \subset \mathbb{R}, \\ &\psi_2(x, y) = x, \qquad \psi_2^{-1}(y) = (-\sqrt{1 - y^2}, y) \end{aligned} \tag{1.19}$$

On a donc quatre cartes. Il faut tout simplement vérifier que tous les changements de cartes sont différentiables. On va considérer par exemple le changement sur $U_1 \cap U_2$. On a

$$\begin{aligned} \phi_2 \circ \phi_1^{-1} &: \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2), \\ &t \in (0, 1) \mapsto \phi_2(t, \sqrt{1 - t^2}) = \sqrt{1 - t^2}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Comme $t \in (0, 1)$, $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ est de classe C^∞.

Cet atlas définit une structure différentiable sur $\mathbb{S}^1$. Un autre atlas assez populaire pour $\mathbb{S}^1$, et qui a seulement deux cartes, est construit à partir de la projection stéréographique (voir exercice). Il définit la même structure différentiable.

Exemple 1.9. *Sous-variété ouverte.* Si M est une variété différentiable de dimension n, et W un ouvert de M, on a que W est une variété différentiable de dimension n: on prend comme atlas la collection

$$\{(U \cap W, \phi|_{U\cap W}) : (U, \phi) \in \mathcal{A}\} \tag{1.21}$$

où $\mathcal{A}$ est la structure différentiable de M.

Exemple 1.10. *Espace vectoriel de dimension finie.* Soit V un espace vectoriel de dimension n. On prend une base de V,

$$V_b = \{v_1, \cdots v_n\}. \tag{1.22}$$

On considère l'isomorphisme d'espaces vectoriels,

$$\begin{aligned} \phi : V &\to \mathbb{R}^n, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i v_i &\mapsto (x_1, \cdots, x_n). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Pour définir une topologie sur V, on dit que $U \subset V$ est un ouvert si $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert. Avec cette topologie, ϕ est clairement un homéomorphisme, et $\{(V, \phi)\}$ est un atlas sur V. Notez qu'une autre base $\{u_1, \cdots, u_n\}$ définit une autre carte locale,

$$\begin{aligned} \psi : V &\to \mathbb{R}^n, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i u_i &\mapsto (y_1, \cdots, y_n). \end{aligned} \tag{1.24}$$

Mais les deux cartes définissent la même structure différentiable, car ϕ et ψ sont linéaires, donc $\phi \circ \psi^{-1}$ et $\psi \circ \phi^{-1}$ sont C^∞.

Exemple 1.11. $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. Le groupe linéaire général est défini par

$$\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}, \tag{1.25}$$

où

$$\mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} : a_i^j \in \mathbb{R},\ 1 \leq i, j \leq n \right\}. \tag{1.26}$$

est l'ensemble de matrices $n \times n$ à coefficients réels. Comme $\mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel de dimension n^2, il a naturellement la structure d'une variété différentiable de dimension n^2, par l'exemple 1.10. En fait, on va l'identifier tout simplement avec l'espace $\mathbb{R}^{n^2}$. On définit maintenant l'application

$$\det : \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \tag{1.27}$$

donnée par le déterminant de la matrice. Il s'agit évidemment d'une application continue. Mais

$$\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) = \det{}^{-1}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \tag{1.28}$$

est l'image inverse d'un ouvert par une application continue, donc il est un ouvert de $\mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$. On conclut, par l'exemple 1.9, que $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ est une sous-variété ouverte de $\mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$ de dimension n^2.

Exemple 1.12. *Variété produit.* Soient M, N deux variétés différentiables de dimensions n, m, respectivement. On considère l'espace topologique produit $M \times N$. Sa topologie est définie par la base d'ouverts donnée par

$$\mathcal{B} = \{U \times V : U \text{ ouvert en } M,\ V \text{ ouvert en } M\}. \tag{1.29}$$

Avec cette topologie, $M \times N$ est Hausdorff. Soient $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, $\{(V_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ les structures différentiables de M, N, respectivement. On peut donner une structure de variété différentiable à $M \times N$ en considérant l'atlas défini par

$$\{(U_\alpha \times V_i, \phi_\alpha \times \psi_i)\}_{(\alpha,i) \in A \times I} \,. \tag{1.30}$$

Évidemment les applications

$$\phi_\alpha \times \psi_i : U_\alpha \times V_i \to \phi_\alpha(U_\alpha) \times \psi_i(V_i) \subset \mathbb{R}^{n+m} \tag{1.31}$$

sont des homéomorphismes. On vérifie aisément qu'il s'agit en effet d'un atlas, car

$$M \times N = \bigcup_{(\alpha,i) \in A \times I} U_\alpha \times V_i, \tag{1.32}$$

et les changements de coordonnées sont de classe C^∞. Donc $M \times N$ est une variété différentiable de dimension $m + n$. En particulier, on a que le *tore* n-dimensionnel

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 \tag{1.33}$$

est une variété différentiable, ainsi que le cylindre infini

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}. \tag{1.34}$$

2. Espace tangent

Définition 2.1. Soit M une variété différentiable de dimension n, W un ouvert de M, et

$$f : W \to \mathbb{R} \tag{2.1}$$

une application. On dit que f est *différentiable* en $p \in W$ s'il existe une carte locale (U, ϕ) tel que $p \in U$ et

$$f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap W) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{2.2}$$

est différentiable de classe C^∞ dans un voisinage ouvert de $\phi(p)$.

Remarque 2.2. Soit (V, ψ) une autre carte locale de M avec $p \in V$. Si f est différentiable en p, $f \circ \psi^{-1}$ est différentiable de classe C^∞ dans un voisinage ouvert de $\phi(p)$. En effet, on a sur $\phi(U \cap V \cap W)$,

$$f \circ \psi^{-1} = \left(f \circ \phi^{-1}\right) \circ \left(\phi \circ \psi^{-1}\right), \tag{2.3}$$

et sur $\psi(U \cap V \cap W)$,

$$f \circ \phi^{-1} = \left(f \circ \psi^{-1}\right) \circ \left(\psi \circ \phi^{-1}\right). \tag{2.4}$$

Comme $\phi \circ \psi^{-1}$ est un difféomorphisme, $f \circ \psi^{-1}$ est différentiable si et seulement si $f \circ \phi^{-1}$ est différentiable.

Les applications différentiables sur un ouvert W,

$$\mathcal{F}(W) = \{f : W \to M : f \text{ est différentiable}\} \tag{2.5}$$

forment un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ avec l'addition et la multiplication par des scalaires.

On notera par $D\left(f \circ \phi^{-1}\right)(\phi(p))$ la différentielle de $f \circ \phi^{-1}$ au point $\phi(p) \in \mathbb{R}^n$, qui est une application linéaire

$$D\left(f \circ \phi^{-1}\right)(\phi(p)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

On dénotera

$$D_i(f \circ \phi^{-1})(\phi(p)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p, \qquad x^i = r^i \circ \phi, \tag{2.7}$$

et

$$D_i(f \circ \psi^{-1})(\psi(p)) = \left(\frac{\partial f}{\partial y^i}\right)_p, \qquad y^i = r^i \circ \psi, \tag{2.8}$$

Donc, par la règle de la chaîne,

$$D\left(f \circ \phi^{-1}\right)(\phi(p)) = D\left(f \circ \psi^{-1}\right)(\psi(p)) \circ D\left(\psi \circ \phi^{-1}\right)(\phi(p)) \tag{2.9}$$

qui est une composition d'applications linéaires et peut être interpretée comme un produit de matrices. En composantes, on a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y^j}\right)_p \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_p, \qquad p \in W \cap U \cap V, \qquad i = 1, \cdots n. \tag{2.10}$$

La matrice qui apparaît ici est le jacobien du changement de cartes

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V). \tag{2.11}$$

On va maintenant définir un objet très important dans l'étude des variétés différentiables: l'espace tangent. On va en fait proposer deux définitions équivalentes, la première plus concrète, la deuxième plus abstraite.

Soit $p \in M$. On considère l'ensemble

$$\Phi_p(M) = \{(U, \phi, a) : (U, \phi) \text{ carte locale de } M \text{ avec } p \in U,\ a \in \mathbb{R}^n\} \tag{2.12}$$

On définit maintenant une relation d'équivalence en $\Phi_p(M)$:

$$(U, \phi, a) \sim (V, \psi, b) \quad \text{si} \quad b = D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(p))a \tag{2.13}$$

En coordonnées,

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_p a_i \tag{2.14}$$

C'est immédiat de voir que cette relation est en fait une relation d'équivalence (reflexive, symétrique et transitive). Pour voir la transitivité, supposons que

$$(U, \phi, a) \sim (V, \psi, b) \quad \text{et} \quad (V, \psi, b) \sim (W, \xi, c) \tag{2.15}$$

Cela veut dire que

$$b = D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(p))a, \quad c = D(\xi \circ \psi^{-1})(\psi(p))b \tag{2.16}$$

donc

$$c = D(\xi\circ\psi^{-1})(\psi(p))D(\psi\circ\phi^{-1})(\phi(p))a = D(\xi\circ\psi^{-1}\circ\psi\circ\phi^{-1})(\phi(p))a = D(\xi\circ\phi^{-1})(\phi(p))a, \quad (2.17)$$

et on conclut que

$$(U, \phi, a) \sim (W, \xi, c), \quad (2.18)$$

ce qui prouve la transitivité.

Définition 2.3. Soit M une variété différentiable de dimension n. L'*espace tangent* à M au point p est défini comme

$$T_p(M) = \Phi_p(M)/\sim \quad (2.19)$$

et les élements de $T_p(M)$, i.e. les classes d'équivalence $[(U, \phi, a)] = [U, \phi, a]$ sont les *vecteurs tangents* à M en p.

On va construire maintenant une bijection de $\mathbb{R}^n$ à $T_p(M)$. Etant donné $p \in M$ et (U, ϕ) une carte locale de M qui contient p, on définit:

$$\begin{aligned} \theta_\phi : \mathbb{R}^n &\to T_p(M) \\ a &\mapsto \theta_\phi(a) = [U, \phi, a]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Cette application est bijective. Pour voir qu'elle est injective, on considère $a, b \in \mathbb{R}^n$ avec

$$\theta_\phi(a) = \theta_\phi(b) \quad (2.21)$$

Cela veut dire que

$$[U, \phi, a] = [U, \phi, b], \quad (2.22)$$

et donc il faut que $a = b$. Pour voir qu'elle est surjective, on considère $[V, \psi, b] \in T_p(M)$. On prend maintenant

$$a = D(\phi \circ \psi^{-1})(\psi(p))b \quad (2.23)$$

et on voit facilement que $[U, \phi, a] = [V, \psi, b]$, car

$$D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(p))a = D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(p))D(\phi \circ \psi^{-1})(\psi(p))b = b \quad (2.24)$$

Cette bijection permet de définir une structure de espace vectoriel sur $T_p(M)$, avec laquelle θ_ϕ est un isomorphisme. Soient $X, Y \in T_p(M)$. On définit

$$\begin{aligned} T_p(M) \times T_p(M) &\to T_p(M) \\ (X, Y) &\mapsto X + Y = \theta_\phi\left(\theta_\phi^{-1}(X) + \theta_\phi^{-1}(Y)\right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times T_p(M) &\to T_p(M) \\ (\lambda, X) &\mapsto \lambda X = \theta_\phi\left(\lambda\theta_\phi^{-1}(X)\right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Notez que l'isomorphisme θ_ϕ dépend du choix d'une carte locale, mais il est immédiat de voir que un changement de carte locale induit un isomorphisme entre les deux espaces vectoriels obtenus.

En effet, on a le diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
 & T_p(M) & \\
\mathbb{R}^n \arrow[ur, "\theta_\phi"] \arrow[rr, "h=D(\psi\circ\phi^{-1})(\phi(p))"] & & \mathbb{R}^n \arrow[ul, "\theta_\psi"']
\end{tikzcd}
\tag{2.27}
$$

i.e.

$$\theta_\phi = \theta_\psi \circ h. \tag{2.28}$$

Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, avec $e_i = (0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$. On dénotera, par des raisons qui seront claires plus tard,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \theta_\phi(e_i) = [U, \phi, e_i] \tag{2.29}$$

Si l'on prend

$$a = (a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i e_i \tag{2.30}$$

on trouve, par linéarité,

$$\theta_\phi(a) = \sum_{i=1}^n a_i \theta_\phi(e_i) = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p. \tag{2.31}$$

En fait, tout élement de $T_p(M)$ peut s'écrire comme

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \quad a_i \in \mathbb{R}. \tag{2.32}$$

Définition 2.4. L'*espace cotangent à M en p* est l'espace dual de $T_p(M)$,

$$T_p^\star(M) = \{\omega : T_p(M) \to \mathbb{R}, \quad \omega \text{ linéaire}\} \tag{2.33}$$

Définition 2.5. Soit $W \subset M$ un ouvert avec $p \in M$, et

$$f : W \to \mathbb{R} \tag{2.34}$$

une application différentiable. La *différentielle* de f en p,

$$(\mathrm{d}f)_p : T_p(M) \to \mathbb{R} \tag{2.35}$$

est une application linéaire définie par

$$(\mathrm{d}f)_p([U, \phi, a]) = \left[D(f \circ \phi^{-1})(\phi(p))\right](a), \tag{2.36}$$

i.e.

$$(\mathrm{d}f)_p = \left[D(f \circ \phi^{-1})(\phi(p))\right] \circ \theta_\phi^{-1} \tag{2.37}$$

En composantes, on a

$$(\mathrm{d}f)_p([U,\phi,a]) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p a_i \tag{2.38}$$

Il faut vérifier que cette application ne dépend pas du choix de représentant pour la classe d'équivalence. C'est facile à vérifier, car, si (V,ψ,b) est un autre représentant de $[U,\phi,a]$, on a

$$b = D(\psi\circ\phi^{-1})(\phi(p))a \tag{2.39}$$

et

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}f)_p([V,\psi,b]) &= \left[D(f\circ\psi^{-1})(\psi(p))\right](b) = \left[D(f\circ\psi^{-1})(\psi(p))\right] D(\psi\circ\phi^{-1})(\phi(p))a \\ &= \left[D(f\circ\psi^{-1}\circ\psi\circ\phi^{-1})(\phi(p))\right] a = \left[D(f\circ\phi^{-1})(\phi(p))\right] a,\end{aligned} \tag{2.40}$$

Exemple 2.6. On considère les fonctions coordonnées

$$x^i : U \to \mathbb{R} \tag{2.41}$$

données par $x^i = r^i\circ\phi$. Leurs différentielles agissent de la façon suivante. Soit $X=[U,\phi,a]$. On a:

$$(\mathrm{d}x^i)(X) = D\left(x^i\circ\phi^{-1}\right)(\phi(p))(a) = D\left(r^i\right)(\phi(p))(a) = r^i(a) = a_i \tag{2.42}$$

car r^i est une fonction linéaire et $D(r^i)=r^i$. C'est facile à voir que $\mathrm{d}x^i$ est une base de $T_p^\star(M)$.

On va maintenant considérer une réalisation très importante de l'espace tangent. Soit M une variété différentiable de dimension n. On considère l'ensemble

$$F(p) = \{f:\ f:W\to\mathbb{R},\ W \text{ ouvert de } M,\ p\in W,\ f \text{ différentiable}\} \tag{2.43}$$

Cet ensemble a une structure naturelle d'espace vectoriel:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x), \quad x\in\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g) \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x), \quad x\in\mathrm{dom}(f),\end{aligned} \tag{2.44}$$

où $\mathrm{dom}(f)$ est l'ouvert de M où f est définie. On définit aussi le produit

$$(f\cdot g)(x) = f(x)g(x), \quad x\in\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g). \tag{2.45}$$

On définit maintenant une relation d'équivalence dans $F(p)$. Soient $f,g\in F(p)$. On dit que f est équivalent à g s'il existe un voisinage ouvert de p, W, tel que

$$f|_W = g|_W \tag{2.46}$$

L'ensemble

$$\mathcal{F}_p = F(p)/\sim \tag{2.47}$$

s'appelle l'ensemble des *germes de fonctions en p*. Il est muni d'une structure d'espace vectoriel, et en plus avec l'addition il a la structure d'un groupe abélien. Si l'on ajoute la multiplication de fonctions, il a la structure d'une algèbre commutative, associative et unitaire sur $\mathbb{R}$.

Définition 2.7. Soit $X\in T_p(M)$, $f\in F(p)$. On définit la *dérivée directionnelle de f par rapport à X* par

$$X(f) = (\mathrm{d}f)_p(X). \tag{2.48}$$

Elle a les propriétés suivantes:

1. $X(f+g) = X(f) + X(g)$.

2. $X(\lambda f) = \lambda X(f)$

3. $X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g)$

Ces propriétés sont faciles à vérifier. Par exemple, si $X = [U, \phi, a]$,

$$\begin{aligned} X(fg) &= (\mathrm{d}(fg))_p(X) = D(fg \circ \phi^{-1})(\phi(p))a = D((f \circ \phi^{-1}) \cdot (g \circ \phi^{-1}))(\phi(p))a \\ &= D(f \circ \phi^{-1})(\phi(p))(a)(g \circ \phi^{-1})(\phi(p)) + (f \circ \phi^{-1})(\phi(p))D(g \circ \phi^{-1})(\phi(p))(a) \\ &= X(f)g(p) + f(p)X(g) \end{aligned} \tag{2.49}$$

Remarque 2.8. Notez que, si (U, ϕ) est une carte locale dans un voisinage de $p \in M$, avec $\phi = (x^1, \cdots, x^n)$, et $X = [U, \phi, a]$, on a

$$X(x^i) = (\mathrm{d}x^i)_p(X) = a_i \tag{2.50}$$

Définition 2.9. Une *dérivation* sur l'ensemble $F(p)$ est une application

$$D : F(p) \to \mathbb{R} \tag{2.51}$$

qui satisfait:

1. $D(f+g) = D(f) + D(g)$

2. $D(\lambda f) = \lambda D(f)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. $D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g)$ (règle de Leibniz).

Exemple 2.10. Soit $X \in T_p(M)$. La dérivée directionelle $X(f)$ peut être regardée comme une dérivation.

Exemple 2.11. Soit (U, ϕ) une carte locale de M, avec $p \in M$. On considère le vecteur tangent (2.29). Il définit une dérivation

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p &: F(p) \to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p = D_i(f \circ \phi^{-1})(\phi(p)) \end{aligned} \tag{2.52}$$

On considère maintenant l'ensemble

$$\mathcal{D}(p) = \{D \text{ dérivation en } F(p)\} \tag{2.53}$$

avec une structure d'éspace vectoriel:

$$\begin{aligned} &D, D' \in \mathcal{D}(p), \quad (D + D')(f) = D(f) + D'(f), \\ &\lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda D)(f) = \lambda D(f). \end{aligned} \tag{2.54}$$

Proposition 2.12. Soient $f, g \in F_p$ et $f \sim g$. Dans ce cas,

$$D(f) = D(g) \tag{2.55}$$

i.e. les dérivations sont des opérateurs locaux.

Démonstration: On suppose que W est un voisinage ouvert de p avec $f|_W = g|_W$. On considère les fonctions

$$\begin{aligned} f - f|_W &= 0|_W, \\ g - g|_W &= 0|_W, \end{aligned} \tag{2.56}$$

donc

$$D(f - f|_W) = D(0|_W) = D(0 \cdot 0|_W) = 0 \cdot D(0|_W) = 0 = D(f) - D(f|_W) \tag{2.57}$$

et on conclut que $D(f) = D(f|_W)$. De façon similaire, on montre que $D(g|_W) = D(g)$. Comme $D(f|_W) = D(g|_W)$ on conclut qu'en effet $D(f) = D(g)$.

Donc, les dérivations descendent à $\mathcal{F}_p$.

On va maintenant voir que l'espace vectoriel des dérivations est isomporphe à $T_p(M)$. On définit l'application

$$\begin{aligned} T_p(M) &\to \mathcal{D}(p) \\ X &\mapsto D_X : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.58}$$

où

$$D_X(f) = X(f). \tag{2.59}$$

On aura besoin aussi du lemme suivant,

Lemme 2.13. *Soit $f \in F(p)$. On peut trouver n fonctions différentiables $f_1, \cdots, f_n \in F(p)$, définies sur un voisinage ouvert V de p, telles que*

$$f(u) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} (x^i(u) - x^i(p)) f_i(u), \qquad \forall u \in V, \tag{2.60}$$

et

$$f_i(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p. \tag{2.61}$$

Démonstration (indication): on considère la fonction $F = f \circ (\phi - \phi(p))^{-1}$, restreinte à une boule ouverte $B(0, r)$ de centre 0 et contenu dans le domaine de $f \circ (\phi - \phi(p))^{-1}$. Pour n'importe quel point $z \in B$ on a

$$F(z^1, \cdots, z^n) - F(0, \cdots, 0) = \int_0^1 \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(tz^1, \cdots, tz^n) = \sum_{i=1}^{n} z^i \int_0^1 \mathrm{d}t\, D_i F(tz^1, \cdots, tz^n) \tag{2.62}$$

On dénote

$$F_i = \int_0^1 \mathrm{d}t\, D_i F(tz^1, \cdots, tz^n), \quad f_i = F_i \circ (\phi - \phi(p)) \tag{2.63}$$

et les fonctions f_i sont celles que l'on cherche.

Théorème 2.14. *L'espace tangent $T_p(M)$ à la variété différentiable M en p est isomorphe à $\mathcal{D}(p)$.*

Démonstration: l'application (2.58) est bien définie, car D_X est bien une dérivation grâce aux propriétés en 2.7. C'est facile à voir qu'il s'agit d'un homomorphisme d'espaces vectoriels. En effet,

$$\begin{aligned} D_{\lambda X+\mu Y}(f) &= (\lambda X + \mu Y)(f) = (\mathrm{d}f)_p(\lambda X + \mu Y) = \lambda(\mathrm{d}f)_p(X) + \mu(\mathrm{d}f)_p(Y) \\ &= \lambda X(f) + \mu Y(f) = (\lambda D_X + \mu D_Y)(f) \end{aligned} \tag{2.64}$$

On va maintenant voir que (2.58) est injective. Soient $X, Y \in T_p(M)$ avec $D_X = D_Y$. On peut écrire, en utilisant (2.32) et (2.50),

$$X = \sum_{i=1}^{n} X(x^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} Y(x^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p. \tag{2.65}$$

Si $D_X = D_Y$, on a $\forall f \in F(p)$,

$$D_X(f) = D_Y(f) \Rightarrow X(f) = Y(f). \tag{2.66}$$

Mais, en particulier, on a pour $f = x^i$,

$$X(x^i) = Y(x^i), \tag{2.67}$$

donc $X = Y$.

Il reste à prouver la surjectivité. Soit $D \in \mathcal{D}(p)$ une dérivation, et soit (U, ϕ) une carte locale de M avec $p \in U$. Les fonctions $x^i : U \to \mathbb{R}$ appartiennent clairement à $F(p)$. Soit

$$a_i = D(x^i), \quad i = 1, \cdots, n. \tag{2.68}$$

On va montrer que $X = [U, \phi, a]$ est le vecteur tangent qui correspond à D, i.e. on va voir que $D_X = D$. Soit $f \in F(p)$. On a

$$\begin{aligned} D_X(f) &= X(f) = (\mathrm{d}f)_p(X) = D(f \circ \phi^{-1})(\phi(p))(a) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p = \sum_{i=1}^{n} D(x^i)\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p. \end{aligned} \tag{2.69}$$

On compare cette expression avec $D(f)$. On utilise maintenant le lemme 2.13 pour calculer

$$\begin{aligned} D(f) &= D(f(p)) + \sum_{i=1}^{n} D\left((x^i - x^i(p))f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f_i(p) D\left(x^i - x^i(p)\right) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - x^i(p))(p) D(f_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i(p) D(x^i) = \sum_{i=1}^{n} D(x^i)\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p \end{aligned} \tag{2.70}$$

et on a prouvé la surjectivité. Dans le calcul d'en haut, on a utilisé que, si f est une fonction constante, $D(f) = 0$ (voir exercices).

3. Applications différentiables

Définition 3.1. Soient M, N variétés différentiables de dimensions m et et n, respectivement. On dit qu'une application

$$f : W \subset M \to N \tag{3.1}$$

est différentiable en $p \in W$ s'ils y a des cartes locales (U, ϕ) et (V, ψ) de M, N, respectivement, avec $p \in U$, $f(p) \in V$, et

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \tag{3.2}$$

est différentiable de classe C^∞ dans un voisinage ouvert de $\phi(p)$.

C'est facile à voir que cette définition ne dépend pas du choix des cartes (vérifiez-le!).

Remarque 3.2. Soit $N = \mathbb{R}$ avec la carte $(\mathbb{R}, \mathbf{1}_\mathbb{R})$. Dans ce cas, on recupère la définition de différentiabilité pour une application $f : M \to \mathbb{R}$.

Exemple 3.3. Soit $M = (a, b)$ une sous-variété ouverte de $\mathbb{R}$ avec $\dim M = 1$. On prend comme carte locale $((a, b), \mathrm{id})$. Une application

$$f : (a, b) \to N \tag{3.3}$$

est différentiable en $p \in (a, b)$ si, pour une carte locale (V, ψ) avec $f(p) \in V$, on a que $\psi \circ f$ est différentiable C^∞ dans un voisinage ouvert de p. Dans ce cas, on dit que f est une courbe différentiable en N.

Exemple 3.4. L'application $\mathrm{id}_M : M \to M$ est différentiable, car si $p \in M$, et (U, ϕ) est une carte locale pour p, on a $\phi \circ \mathrm{id}_M \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}|_{\phi(U)}$ qui est différentiable. De la même façon, l'inclusion d'un ouvert

$$i : W \to M \tag{3.4}$$

est différentiable: si $p \in W$ et (U, ϕ) est une carte locale pour p, on prend la carte locale sur W donnée par $(U \cap W, \phi|_{U \cap W})$. La composition

$$\phi \circ i \circ \phi^{-1}|_{U \cap W} = i : \phi(U \cap W) \to \phi(U) \tag{3.5}$$

est différentiable.

Exemple 3.5. Une fonction constante $f : M \to N$ est différentiable, car $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est constante, donc différentiable.

La proposition suivante est très simple et on la prouvera dans les exercices:

Proposition 3.6. Soient M, N, L variétés différentiables, $W \subset M$ ouvert de M, $W' \subset N$ ouvert de N,

$$f : W \subset M \to N, \qquad g : W' \subset N \to L \tag{3.6}$$

des applications. Soit $p \in W$, $q = f(p) \in W'$. Si f est différentiable en p, et g est différentiable en q, $g \circ f$ est différentiable en p.

Définition 3.7. Une application $f : M \to N$ est un difféomorphisme si f est bijective et f, f^{-1} sont différentiables.

Remarque 3.8. Tout difféomorphisme est un homéomorphisme, mais la réciproque n'est pas vraie: l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 \end{aligned} \tag{3.7}$$

est un homéomorphisme mais pas un difféomorphisme.

Définition 3.9. Soit $f : M \to N$ une application différentiable, $p \in M$, $q = f(p)$. L'application

$$\begin{aligned} f_{\star p} : T_p(M) &\to T_q(N) \\ [U, \phi, a] &\mapsto [V, \psi, D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(p))(a)] \end{aligned} \tag{3.8}$$

est la *différentielle de f en $p \in M$.*

Il faut montrer que cette application est bien définie et ne dépend pas du choix de représentant. Soit $(\overline{U}, \overline{\phi}, \overline{a}) \sim (U, \phi, a)$. Soit aussi $(\overline{V}, \overline{\psi})$ une carte locale de N avec $q \in \overline{V}$. Notez que

$$f_{\star p} = \theta_\psi \circ D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(p)) \circ \theta_\phi^{-1} \tag{3.9}$$

est une application linéaire. Il faut tout simplement vérifier que

$$f_{\star p} = \theta_{\overline{\psi}} \circ D(\overline{\psi} \circ f \circ \overline{\phi}^{-1})(\overline{\phi}(p)) \circ \theta_{\overline{\phi}}^{-1} \tag{3.10}$$

Mais on a

$$\theta_\psi = \theta_{\overline{\psi}} \circ D(\overline{\psi} \circ \psi^{-1})(\psi(p)), \qquad \theta_{\overline{\phi}}^{-1} = D(\overline{\phi} \circ \phi^{-1})(\phi(p)) \circ \theta_\phi^{-1}, \tag{3.11}$$

et la vérification est immédiate.

Proposition 3.10. Soit $f : M \to N$ différentiable, $p \in M$, $q = f(p)$. Soit $h \in F(q)$. On a

$$\mathrm{d}(h \circ f)_p = (\mathrm{d}h)_q \circ f_{\star p} \tag{3.12}$$

Démonstration: Soit $h \in F(q)$. Cela veut dire qu'il existe un voisinage ouvert W de q tel que $h : W \to \mathbb{R}$ est différentiable et la fonction $h \circ f$ est aussi différentiable dans un voisinage ouvert $f^{-1}(W)$ de p. Soit $X \in T_p(M)$, $X = [U, \phi, a]$. On a

$$\mathrm{d}(h \circ f)_p(X) = D((h \circ f) \circ \phi^{-1})(\phi(p))(a) \tag{3.13}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}h)_q \circ f_{\star p}(X) &= (\mathrm{d}h)_q[V, \psi, D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(p))(a)] \\ &= D(h \circ \psi^{-1})(\psi(p)) D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(p))(a) = D(h \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(p))(a) \\ &= D(h \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(p))(a) = \mathrm{d}(h \circ f)_p(X) \end{aligned} \tag{3.14}$$

On va voir maintenant quelle est l'action de la différentielle dans l'espace tangent comme espace de dérivations $\mathcal{D}(p)$:

$$f_{\star p} : \mathcal{D}(p) \to \mathcal{D}(q) \tag{3.15}$$

Soit $X \in \mathcal{D}(p)$ une dérivation, et $h \in F(q)$. On a,

$$f_{\star p}(X)(h) = (\mathrm{d}h)_q(f_{\star p}(X)) = \mathrm{d}(h \circ f)_p(X) = X(h \circ f). \tag{3.16}$$

Proposition 3.11. (*Règle de la chaîne*) Soient $f : M \to N$, $g : N \to L$ applications différentiables, $p \in M$, $q = f(p)$. On a

$$(g \circ f)_{\star p} = g_{\star q} \circ f_{\star p} \tag{3.17}$$

Démonstration: Soit $X \in T_p(M)$, $h \in F(g(q))$. On a

$$(g \circ f)_{\star p}(X)(h) = X(h \circ (g \circ f)) \tag{3.18}$$

et d'autre part

$$(g_{\star q} \circ f_{\star p})(X)(h) = g_{\star q}(f_{\star p}(X))(h) = (f_{\star p}(X))(h \circ g) = X((h \circ g) \circ f). \tag{3.19}$$

Définition 3.12. On appelle le rang de f en p

$$\text{rang } f_{\star p} = \dim \left(f_{\star p}(T_p(M)) \right) \tag{3.20}$$

On va maintenant donner l'expression locale de l'action de $f_{\star p}$. Soient $\phi = (x^1, \cdots, x^m)$ et $\psi = (y^1, \cdots, y^n)$ des systèmes de coordonnées locales dans un voisinage de $p \in M$, $q \in N$. On écrit un vecteur tangent de $T_p(M)$ dans la base (2.32). Il faut donc calculer

$$f_{\star p}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right) = \sum_{j=1}^{n} \left[f_{\star p}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right)\right](y^j) \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_q \tag{3.21}$$

mais

$$\left[f_{\star p}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right)\right](y^j) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (y^j \circ f) = \left(\frac{\partial (y^j \circ f)}{\partial x^i}\right)_p, \tag{3.22}$$

donc

$$f_{\star p}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial (y^j \circ f)}{\partial x^i}\right)_p \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_q \tag{3.23}$$

et elle fait intervenir la matrice

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial (y^1 \circ f)}{\partial x^1}\right)_p & \cdots & \left(\frac{\partial (y^1 \circ f)}{\partial x^m}\right)_p \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{\partial (y^n \circ f)}{\partial x^1}\right)_p & \cdots & \left(\frac{\partial (y^n \circ f)}{\partial x^m}\right)_p \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

On va considérer maintenant quelques exemples de la différentielle.

Exemple 3.13. Si $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, la différentielle est la différentielle usuelle entre espaces euclidiens:

$$f_{\star p}([\mathbb{R}^m, 1_{\mathbb{R}^m}, a]) = [\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n}, D(1_{\mathbb{R}^n} \circ f \circ 1_{\mathbb{R}^m}^{-1})(p)(a)] = [\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n}, D(f)(p)(a)] \tag{3.25}$$

Exemple 3.14. La différentielle de $\mathrm{id}_M : M \to M$ est

$$(\mathrm{id}_M)_{\star p} = \mathrm{id}_{T_p(M)} \tag{3.26}$$

Exemple 3.15. Soit $\alpha : (a,b) \to M$ une courbe différentiable sur la variété M, $t_0 \in (a,b)$. On a

$$\alpha_{\star t_0} : T_{t_0}(\mathbb{R}) \to T_{\alpha(t_0)}(M) \tag{3.27}$$

donnée par

$$\alpha_{\star t_0}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} = \sum_{i=1}^{m}\left[\alpha_{\star t_0}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0}\right](x^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\alpha(t_0)} \tag{3.28}$$

mais

$$\left[\alpha_{\star t_0}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0}\right](x^i) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0}(x^i \circ \alpha) = (x^i \circ \alpha)'(t_0). \tag{3.29}$$

Si l'on dénote

$$\alpha^i = x^i \circ \alpha \tag{3.30}$$

on trouve

$$\alpha_{\star t_0}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\alpha(t_0)} = [U, \phi, (\phi \circ \alpha)'(t_0)] \tag{3.31}$$

Exemple 3.16. Soit M une variété différentiable, $W \subset M$ une sous-variété ouverte de M. Soit $p \in W$ et (U, ϕ) une carte locale de M en p. L'inclusion $i : W \to M$ est différentiable, et sa différentielle est

$$i_{\star p} : T_p(W) \to T_p(M) \tag{3.32}$$

qui est donnée par

$$i_{\star p}([U \cap W, \phi|_{U\cap W}, a]) = [U, \phi, D(\phi \circ i \circ \phi^{-1}|_{U\cap W})(\phi(p))(a)] = [U, \phi, a] \tag{3.33}$$

Elle a une inverse donnée par

$$[U, \phi, a] \mapsto [U \cap W, \phi|_{U\cap W}, a] \tag{3.34}$$

et on a donc un isomorphisme d'espaces vectoriels,

$$T_p(M) \simeq T_p(W). \tag{3.35}$$

Exemple 3.17. Soit $f : M \to N$ une fonction constante dans un voisinage de p. On a $f_{\star p} = 0$. En effet, soit $X \in T_p(M)$, $h \in F(f(p))$ quelconques. On trouve

$$f_{\star p}(X)(h) = X(h \circ f) = 0 \tag{3.36}$$

car $h \circ f$ est constante dans un voisinage de p.

Exemple 3.18. Si $f : M \to N$ est un difféomorphisme, $f_{\star p}$ est un isomorphisme (la preuve est proposée comme exercice).

Soient maintenant M, N variétés différentiables. Par l'exemple 1.12, l'espace $M \times N$ est une variété différentiable de dimension $m + n$. Il est facile à voir que les projections

$$\begin{aligned} \pi_1 : M \times N &\to M \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}\pi_2 : M \times N &\to N \\ (x, y) &\mapsto y\end{aligned} \tag{3.38}$$

ainsi que les inclusions

$$\begin{aligned}i_q : M &\to M \times N \\ x &\mapsto (x, q),\end{aligned} \tag{3.39}$$

et

$$\begin{aligned}i_p : N &\to M \times N \\ y &\mapsto (p, y),\end{aligned} \tag{3.40}$$

sont des applications différentiables. On a maintenant des applications linéaires

$$(\pi_1)_{\star(p,q)} : T_{(p,q)}(M \times N) \to T_p(M), \qquad (\pi_2)_{\star(p,q)} : T_{(p,q)}(M \times N) \to T_q(N) \tag{3.41}$$

et

$$(i_q)_{\star p} : T_p(M) \to T_{(p,q)}(M \times N), \qquad (i_p)_{\star q} : T_q(N) \to T_{(p,q)}(M \times N) \tag{3.42}$$

On va prouver maintenant le

Théorème 3.19. *L'application*

$$\begin{aligned}\rho : T_{(p,q)}(M \times N) &\to T_p(M) \oplus T_q(N) \\ Z &\mapsto \big((\pi_1)_{\star(p,q)}(Z), (\pi_2)_{\star(p,q)}(Z)\big)\end{aligned} \tag{3.43}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration: On considère

$$\begin{aligned}\sigma : T_p(M) \oplus T_q(N) &\to T_{(p,q)}(M \times N) \\ (X, Y) &\mapsto (i_q)_{\star p}(X) + (i_p)_{\star q}(Y)\end{aligned} \tag{3.44}$$

On montre aisément que

$$\rho \circ \sigma = \mathrm{id}_{T_p(M) \oplus T_q(N)} \tag{3.45}$$

En effet,

$$\begin{aligned}(\rho \circ \sigma)(X, Y) &= \rho\left((i_q)_{\star p}(X) + (i_p)_{\star q}(Y)\right) \\ &= \big((\pi_1)_{\star(p,q)}((i_q)_{\star p}(X) + (i_p)_{\star q}(Y)), (\pi_2)_{\star(p,q)}((i_q)_{\star p}(X) + (i_p)_{\star q}(Y))\big) \\ &= ((\pi_1 \circ i_q)_{\star p}(X) + (\pi_1 \circ i_p)_{\star q}(Y), (\pi_2 \circ i_q)_{\star p}(X) + (\pi_2 \circ i_p)_{\star q}(Y)) \\ &= ((\mathrm{id}_M)_{\star p}(X) + (\mathrm{constante}_p)_{\star q}(Y), (\mathrm{constante}_q)_{\star p}(X) + (\mathrm{id}_N)_{\star q}(Y)) \\ &= (X, Y)\end{aligned} \tag{3.46}$$

On conclut que σ est injective, et ρ surjective. Mais comme les espaces vectoriels $T_p(M) \oplus T_q(N)$ et $T_{(p,q)}(M \times N)$ ont la même dimension, ils doivent être isomorphes. □

Corollaire 3.20. (Formule de Leibniz) Soit $f : M \times N \to L$ différentiable. On a

$$f_{\star(p,q)}(Z) = (f_q)_{\star p}(X) + (f_p)_{\star q}(Y) \tag{3.47}$$

où

$$f_q = f \circ i_q, \qquad f_p = f \circ i_p \tag{3.48}$$

et on a utilisé le théorème antérieur pour représenter Z comme (X, Y).

La preuve est immédiate quand on écrit

$$Z = (i_q)_{\star p}(X) + (i_p)_{\star q}(Y). \tag{3.49}$$

4. Immersions et submersions

On commence avec quelques résultats classiques d'analyse.

Théorème 4.1. *(de la fonction inverse). Soit $G \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert,*

$$F : G \to \mathbb{R}^n \tag{4.1}$$

une application différentiable de classe C^k, $a \in G$, $DF(a)$ un isomorphisme. Dans ce cas, on a un voisinage ouvert de a, A, et un voisinage ouvert de b, B, tels que

$$F|_A : A \to B \tag{4.2}$$

est un difféomorphisme de classe C^k.

Corollaire 4.2. Soit $G \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert,

$$f : G \to \mathbb{R}^m \tag{4.3}$$

avec $n \leq m$ une application différentiable C^k en G, $a \in G$, et rang $Df(a) = n$. Dans ce cas, il existe un voisinage ouvert U de a, un voisinage ouvert V de $f(a)$, un voisinage ouvert W de $0 \in \mathbb{R}^{m-n}$, et un difféomorphisme

$$h : U \times W \to V \tag{4.4}$$

tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & V \\ & U \times W \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

est commutatif, i.e. $h(x, 0) = f(x)$.

Corollaire 4.3. Soit $G \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert,

$$f : G \to \mathbb{R}^n \tag{4.6}$$

avec $m \geq n$ une application différentiable C^k en G, $a \in G$, et rang $Df(a) = n$. Dans ce cas, il existe un voisinage ouvert U de a, un voisinage ouvert V de $f(a)$, un voisinage ouvert W de $0 \in \mathbb{R}^{m-n}$, et un difféomorphisme

$$h : U \to V \times W \tag{4.7}$$

tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & V \\ & V \times W \arrow[ur, "\pi_1"'] & \end{tikzcd} \tag{4.8}$$

est commutatif, i.e. $h(x) = (f(x), \cdot)$.

On va appliquer maintenant ces théorèmes pour les variétés.

Théorème 4.4. *(de la fonction inverse pour variétés). Soient M, N variétés différentiables, $f : M \to N$ une application différentiable, $p \in M$, $q = f(p)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) $f_{\star p} : T_p(M) \to T_q(N)$ est un isomorphisme.

(b) f est un difféomorphisme local en p, i.e. il y a un voisinage ouvert U de p et un voisinage ouvert de q tels que $f|_U : U \to V$ est un difféomorphisme.

Démonstration: que (b) implique (a) est très facile à prouver. On a les diagrammes

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N & T_p(M) \arrow[r, "f_{\star p}"] & T_q(N) \\ U \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f|_U"'] & V \arrow[u, "j"'] & T_p(U) \arrow[u, "i_{\star p}"] \arrow[r, "(f|_U)_{\star p}"'] & T_q(V) \arrow[u, "j_{\star q}"'] \end{tikzcd} \tag{4.9}$$

Comme $i_{\star p}$, $j_{\star q}$ sont des isomorphismes (par l'exemple 3.16), et $(f|_U)_{\star p}$ est isomorphisme (car $f|_U$ est difféomorphisme), $f_{\star p}$ est un isomorphisme.

On montre maintenant que (a) implique (b). On a, par hypothèse, que $T_p(M) \simeq T_q(N)$, donc ils doivent avoir la même dimension, et $m = n$. Soient $(U^\star, \phi)$, $(V^\star, \psi)$ cartes locales de M en p et de N en q, respectivement. On sait que la matrice jacobienne de l'expression locale de f,

$$D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(p)) \tag{4.10}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$, avec éléments

$$\left(\frac{\partial(y^j \circ f)}{\partial x^i}\right)_p = D_i((\psi \circ f \circ \phi^{-1})^j(\phi(p)) \tag{4.11}$$

On a donc une application entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ avec un jacobien dont le déterminant n'est pas zéro,

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U^\star \cap f^{-1}(V^\star)) \to \psi(V^\star) \tag{4.12}$$

On peut utiliser donc le théorème de la fonction inverse: il existe des voisinage ouverts A de $\phi(p)$, et B de $\psi(q)$, tels que

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : A \to B \tag{4.13}$$

est un difféomorphisme C^∞.

Soient maintenant $U = \phi^{-1}(A) \subset U^\star$, $V = \psi^{-1}(B) \subset V^\star$. On a donc le diagramme commutatif,

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f|_U"] \arrow[d, "\phi"] & V \arrow[d, "\psi"'] \\ A \arrow[r, "\psi \circ f \circ \phi^{-1}"'] & B \end{tikzcd} \tag{4.14}$$

et

$$f|_U = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ \phi \tag{4.15}$$

est une composition de difféomorphismes, donc un difféomorphisme. $\square$

Théorème 4.5. *Soient M, N variétés différentiables de dimensions m et n, respectivement, avec $m \leq n$, $f : M \to N$ une application différentiable, $p \in M$, $q = f(p)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) $f_{\star p}$ est injective.

(b) il y a un voisinage ouvert U de p, un voisinage ouvert V de q, un voisinage ouvert de W de 0 en $\mathbb{R}^{n-m}$, et un difféomorphisme $h : U \times W \to V$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & V \\ & U \times W \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd} \tag{4.16}$$

est commutatif.

(c) il existe un système de coordonnées locales $\phi = (x^1, \cdots, x^m)$ dans un voisinage de p, et un système de coordonnées locales $\psi = (y^1, \cdots, y^n)$ dans un voisinage de q tels que

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(a_1, \cdots, a_m) = (a_1, \cdots, a_m, 0, \cdots, 0) \tag{4.17}$$

Si, pour tout point $p \in M$, une de ces conditions est vérifiée, on dit que f est une immersion.

Démonstration: on montre que (a) implique (b). Comme $f_{\star p}$ est injective,

$$T_p(M) \simeq f_{\star p}(T_p(M)), \tag{4.18}$$

et le rang de f en p est égal à la dimension de M, i.e. m. Soient $(U^\star, \phi)$, $(V^\star, \psi)$ cartes locales de M en p et de N en q, respectivement. L'expression locale de f dans ces systèmes de coordonnées

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U^\star \cap f^{-1}(V^\star)) \to \psi(V^\star) \tag{4.19}$$

a un jacobien dont le rang est m. On est donc dans le conditions du corollaire 4.2: il existe des voisinages ouverts U' de $\phi(p)$, V' de $\psi(q)$, W de $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$, et un difféomorphisme C^∞

$$\tilde{h} : U' \times W \to V' \tag{4.20}$$

tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[rr, "\psi\circ f\circ\phi^{-1}"] \arrow[dr, "i"'] & & V' \\ & U' \times W \arrow[ur, "\tilde{h}"'] & \end{tikzcd} \tag{4.21}$$

est commutatif. On va tout simplement transplanter ce résultat aux variétés. Soient

$$U = \phi^{-1}(U'), \qquad V = \psi^{-1}(V'), \qquad h = \psi^{-1}|_{V'} \circ \tilde{h} \circ (\phi|_U \times \mathrm{id}_W) \tag{4.22}$$

On a donc le diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[dr, "\psi|_V"] & \\
U \times W \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "\phi|_U \times \mathrm{id}_W"'] & & V' \\
& U' \times W \arrow[ur, "\tilde{h}"'] &
\end{tikzcd}
\tag{4.23}
$$

et on en déduit que h est un difféomorphisme, car toutes les lignes du carré sont des difféomorphismes. Il faut tout simplement vérifier que $h \circ i = f$.

$$
\begin{aligned}
(h \circ i)(x) = h(x,0) &= \psi^{-1}|_{V'} \circ \tilde{h} \circ (\phi|_{U'} \times \mathrm{id}_W)(x,0) = \psi^{-1}(\tilde{h}(\phi(x),0)) \\
&= \psi^{-1}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(x)) = f(x).
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

On prouve maintenant que (b) implique (c). Par hypothèse, il y a un voisinage ouvert de p, U avec les propriétés indiquées dans l'énoncé. On peut toujours trouver (par intersection d'ouverts, par exemple) une carte locale de p, $(U^\star, \phi)$, avec $U^\star \subset U$. On va restreindre le triangle commutatif à $U^\star$:

$$
\begin{tikzcd}
U^\star \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & V^\star \\
& U^\star \times W \arrow[ur, "h|_{U^\star \times W}"'] &
\end{tikzcd}
\quad , \qquad V^\star = h(U^\star \times W) \subset V
\tag{4.25}
$$

et $V^\star$ est un ouvert. On considère maintenant

$$
\begin{tikzcd}
U^\star \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & V^\star \arrow[dr, "\psi"] & \\
& U^\star \times W \arrow[ur, "h|_{U^\star \times W}"'] \arrow[rr, "\phi \times \mathrm{id}_W"'] & & \phi(U^\star) \times W
\end{tikzcd}
\quad , \qquad \text{avec} \quad \psi = (\phi \times \mathrm{id}_W) \circ (h|_{U^\star \times W})^{-1}.
\tag{4.26}
$$

Comme ψ est composition de difféomorphismes, il est un difféomorphisme. Donc, $(V^\star, \psi)$ est une carte locale de N, et en plus

$$
\psi(V^\star) = \phi(U^\star) \times W.
\tag{4.27}
$$

On calcule maintenant

$$
(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(a) = \left((\phi \times \mathrm{id}_W) \circ (h|_{U^\star \times W})^{-1} \circ f\right)(\phi^{-1}(a)) = (\phi \times \mathrm{id}_W)(\phi^{-1}(a), 0) = (a, 0)
\tag{4.28}
$$

où l'on a utilisé que, par hypothèse, $h^{-1} \circ f = i$.

Finalement, on prouve que (c) implique (a). Pour montrer que $f_{\star p}$ est injective, il suffit de montrer que

$$\operatorname{rang}\big(D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(p))\big) = m \tag{4.29}$$

Mais, dans le système de coordonnées de (c), le jacobien de l'expression locale de f est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.30}$$

qui a rang m. □

On a aussi le théorème suivant, dont la preuve est proposée comme exercice:

Théorème 4.6. *Soient M, N variétés différentiables de dimensions m et n, respectivement, avec $m \geq n$, $f : M \to N$ une application différentiable, $p \in M$, $q = f(p)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) $f_{\star p}$ est surjective.

(b) il y a un voisinage ouvert U de p, un voisinage ouvert V de q, et un voisinage ouvert de W de 0 en $\mathbb{R}^{m-n}$ et un difféomorphisme $h : U \to V \times W$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & V \\ & V \times W \arrow[ur, "\pi_1"'] & \end{tikzcd} \tag{4.31}$$

est commutatif.

(c) il existe un système de coordonnées locales $\phi = (x^1, \cdots, x^m)$ dans un voisinage de p, et un système de coordonnées locales $\psi = (y^1, \cdots, y^n)$ dans un voisinage de p tels que

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(a_1, \cdots, a_m) = (a_1, \cdots, a_n) \tag{4.32}$$

Si, pour tout point $p \in M$, une de ces conditions est vérifiée, on dit que f est une submersion.

On va voir maintenant quelques exemples simples de submersions et immersions.

Exemple 4.7. Soient M, N variétés différentiables de dimensions m et n, respectivement. Soit $q \in N$, et on considère l'inclusion i_q définie en (3.39). Soient (U, ϕ), (V, ψ) des cartes locales de M et N, $p \in U$, $q \in V$. Donc, $(U \times V, \phi \times \psi)$ est une carte locale de $M \times N$. L'expression locale de i_q est

$$\begin{aligned} (\phi \times \psi) \circ i_q \circ \phi^{-1} : \phi(U) &\to \phi(U) \times \psi(V) \\ (x^1, \cdots, x^m) &\mapsto (x^1, \cdots, x^m, c^1, \cdots, c^n), \end{aligned} \tag{4.33}$$

où

$$\psi(q) = (c^1, \cdots, c^n). \tag{4.34}$$

et donc son jacobienne est precisément la matrice (4.30). On voit que i_q est une immersion. Si l'on compose ψ avec la translation $x \mapsto x - c$, on obtient une carte locale dans les conditions de l'épigraphe (c) du théorème 4.5.

Exemple 4.8. On considère maintenant la projection $\pi_1 : M \times N \to M$. Son expression locale dans le système de coordonnées de l'exemple antérieur est

$$\begin{aligned} \phi \circ \pi_1 \circ (\phi \times \psi)^{-1} : \phi(U) \times \psi(V) &\to \phi(U) \\ (x, y) &\mapsto x, \end{aligned} \tag{4.35}$$

Le jacobien de cette application est la matrice transposée de (4.30), avec rang m. Donc, $(\pi_1)_{\star(p,q)}$ est surjective, et π_1 est une submersion.

5. Sous-variétés

5.1 Sous-variétés plongées, immergées et regulières

Définition 5.1. Soient X, Y espaces topologiques. On dit que

$$f : X \to Y \tag{5.1}$$

est un *plongement* (topologique) si f est injective, continue, et définit un homéomorphisme dans son image:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\tilde{f}"'] & & Y \\ & f(X) \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd} \tag{5.2}$$

De façon équivalente, si U est un ouvert en X, $f(U)$ doit être un ouvert en $f(X)$, i.e. $f(U) = E \cap f(X)$, avec E un ouvert de Y.

Exemple 5.2. Soit X, Y espaces topologiques. L'inclusion $i_q : X \to X \times Y$ es un plongement. En effet, si U est un ouvert de X, on a

$$i_q(U) = U \times \{q\} = (U \times Y) \cap i_q(X), \tag{5.3}$$

et comme $U \times Y$ est un ouvert de $X \times Y$, on voit que $i_q(U)$ est un ouvert de $i_q(X)$ avec la topologie induite.

Définition 5.3. Soient M et N variétés différentiables. Une application différentiable

$$f : M \to N \tag{5.4}$$

est un *plongement régulier* si f est une immersion et un plongement topologique. Donc, elle induit un homéomorphisme entre M et $f(M)$.

Exemple 5.4. Si W est une variété ouverte d'une variété différentiable M, l'inclusion $i : W \to M$ est un plongement régulier.

Exemple 5.5. L'inclusion $i_q : M \to M \times N$ es un plongement régulier.

Exemple 5.6. Tout difféomorphisme est un plongement régulier, car un homéomorphisme est trivialement un plongement topologique.

Exemple 5.7. La composition de plongements réguliers est un plongement régulier, car la composition d'immersions est une immersion, et la composition de plongements topologiques est un plongement topologique.

Exemple 5.8. L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned} \tag{5.5}$$

est une immersion mais pas un plongement régulier, car elle n'est pas injective.

Exemple 5.9. Si $f : M \to N$ est une immersion, elle est localement un plongement régulier; pour tour $p \in U$, il existe un voisinage ouvert de p, U, tel que

$$f|_U : U \to N \tag{5.6}$$

est un plongement régulier (exercice).

Exemple 5.10. On considère l'application

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(t^2 - 4, t^3 - 4t\right) \end{aligned} \tag{5.7}$$

Il s'agit d'une immersion, car

$$\alpha'(t) = (2t, 3t^2 - 4) \neq (0,0), \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{5.8}$$

Pourtant, elle n'est pas injective, car

$$\alpha(-2) = \alpha(2) = (0,0) \tag{5.9}$$

Si on se restreint á $I = (-\infty, 2)$, i.e. on considère l'application

$$f = \alpha|_I \tag{5.10}$$

elle est injective. Mais elle n'est pas un plongement topologique, car il y a des ouverts en I (par exemple, $U = (-3,0)$) dont l'image n'est pas un ouvert de $\alpha(I)$ avec la topologie relative.

Définition 5.11. Soit M une variété différentiable. Si N est une variété différentiable et $f : N \to M$ une immersion injective, on dit que le pair (N, f), ou bien l'ensemble $f(N)$, avec la topologie et la structure différentiable avec laquelle

$$f : N \to f(N) \tag{5.11}$$

est un difféomorphisme, est une *sous-variété de M*, ou une *sous-variété immergée*. Si en plus f est un plongement, on dit que $f(N)$ est une *sous-variété plongée* de M.

Remarque 5.12. La topologie de $f(N)$ est la *topologie finale* induite par f en N. Les ouverts U de la sous-variété immerse $f(N)$ sont tels que $f^{-1}(U)$ est un ouvert de N, et les cartes locales sont de la forme $(U, \phi \circ f^{-1}|_U)$. Notez que la topologie qui fait que f soit un difféomorphisme n'est pas nécessairement la topologie relative. Comme la topologie finale est la topologie plus fine qui fait que f soit continue, la topologie de la sous-variété $f(N)$ est en général plus fine que la topologie relative de $f(N)$ (il y a des ouverts dans la sous-variété $f(N)$ qui ne sont pas des intersections avec les ouverts de N).

Exemple 5.13. On considère l'application f de l'exemple 5.10. (I, f) est une sous-variété immergée de $\mathbb{R}^2$ mais pas une sous-variété plongée.

Exemple 5.14. Une sous-variété ouverte de M, $i : W \to M$, est une sous-variété plongée. Avec l'inclusion $i_q : M \to M \times N$, (M, i_q) est aussi une sous-variété plongée.

Un résultat utile pour l'étude des sous-variétés, que l'on prouvera dans les exercices, est le lemme de factorisation:

Lemme 5.15. *(Lemme de factorisation) Soit M une variété différentiable, (N, f) une sous-variété immergée de M, L une variété différentiable, et $g : L \to M$ une application différentiable qui factorise à travers de (N, f): $g(L) \subset f(N)$. Il existe une application $g_0 : L \to N$ tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "g_0"'] & & M \\ & N \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \tag{5.12}$$

est commutatif, et avec les propriétés suivantes:
(a) si g_0 est continue, elle est différentiable.
(b) si f est un plongement, g_0 est continue.

Exemple 5.16. On considère l'application

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} &\to \mathbb{S}^n \\ x &\to \frac{x}{\|x\|}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Elle factorise comme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & \mathbb{R}^{n+1} \\ & \mathbb{S}^n \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd} \tag{5.14}$$

où $g(x) = x/\|x\|$. g est clairement différentiable comme application entre $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ et $\mathbb{R}^{n+1}$, et d'autre part i est un plongement régulier: elle est une immersion injective (voir exercices) et clairement un plongement topologique, car la topologie de $\mathbb{S}^n$ est la topologie relative induite par l'inclusion en $\mathbb{R}^{n+1}$. Par le lemme de factorisation, on a que σ est continue et différentiable.

Définition 5.17. Soit M une variété différentiable de dimension m, soit $1 \leq n \leq m$. Si $N \subset M$, on dit que N a la *propriété de n-sous-variété de M* si, pour tout $p \in N$, il existe une carte locale (V, ψ) de M, telle que

$$\psi(V) = B \times C, \tag{5.15}$$

où B est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, C est un ouvert de $\mathbb{R}^{m-n}$, et

$$\psi(V \cap N) = B \times \{c\}, \qquad c \in C. \tag{5.16}$$

Théorème 5.18. *Soit M une variété différentiable de dimension m. Si N est un sous-ensemble de M avec la propriété de n-sous-variété, on a que, avec la topologie relative, N admet une structure de variété différentiable de dimension n, et l'inclusion $i : N \to M$ est un plongement régulier. En d'autres mots, $i(N)$ est une sous-variété plongée de M*

Démonstration: Avec la topologie relative, N est Hausdorff. Pour voir qu'elle est une variété différentiable, il faut construire un atlas de N. Par la propriété de n-sous-variété, pour tout point $p \in N$, il existe un ouvert V de M et un difféomorphisme ψ de V en $B \times C$ avec

$$\psi(V \cap N) = B \times \{c\}, \quad c \in C. \tag{5.17}$$

Il s'en suit qu'il existe une famille d'ouverts et difféomorphismes $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}$ qui recouvrent N avec ces propriétés, i.e.

$$\psi_\alpha(V_\alpha) = B_\alpha \times C_\alpha, \qquad \psi_\alpha(V_\alpha \cap N) = B_\alpha \times \{c_\alpha\}, \quad c_\alpha \in C_\alpha. \tag{5.18}$$

On définit maintenant

$$U_\alpha = V_\alpha \cap N \tag{5.19}$$

et

$$\phi_\alpha : U_\alpha \to B_\alpha \subset \mathbb{R}^n \tag{5.20}$$

par

$$\phi_\alpha = \pi_1 \circ \psi_\alpha|_{U_\alpha}. \tag{5.21}$$

avec

$$\pi_1 : B_\alpha \times C_\alpha \to B_\alpha, \tag{5.22}$$

ϕ_α est un homéomorphisme. En effet, son inverse est donnée par

$$\phi_\alpha^{-1} = \psi_\alpha^{-1} \circ i_{c_\alpha} \tag{5.23}$$

où

$$\begin{aligned} i_{c_\alpha} : B_\alpha &\to B_\alpha \times C_\alpha \\ b &\mapsto (b, c_\alpha) \end{aligned} \tag{5.24}$$

car

$$\begin{aligned} (\phi_\alpha \circ \phi_\alpha^{-1})(b) &= \phi_\alpha(\psi_\alpha^{-1}(b, c_\alpha)) = (\pi_1 \circ \psi_\alpha)(\psi_\alpha^{-1}(b, c_\alpha)) = b, \\ (\phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\alpha)(x) &= (\psi_\alpha^{-1} \circ i_{c_\alpha} \circ \pi_1 \circ \psi_\alpha)(x) = (\psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\alpha)(x) = x, \end{aligned} \tag{5.25}$$

où, dans la deuxième ligne, on a utilisé que

$$\psi_\alpha(x) = (\phi_\alpha(x), c_\alpha). \tag{5.26}$$

Pour voir que l'on a défini un atlas, il faut vérifier que, si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, les changements de coordonnées $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ sont différentiables. Mais on vérifie immédiatement que

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} = \pi_1 \circ \left(\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}\right) \circ i_{c_\alpha}. \tag{5.27}$$

Toutes ces applications sont différentiables, donc on a prouvé qu'il s'agit d'un atlas. Finalement, on doit prouver que N est une sous-variété plongée de M. Clairement, l'inclusion $i : N \to M$ est une injection et un plongement topologique, car la topologie de N est la relative. Il suffit de montrer qu'elle est une immersion. Pour voir cela, soit $p \in N \subset M$, et on prend comme carte locale de M en p (V, ψ) avec les propriétés en haut, et comme carte locale de N en p le pair (U, ϕ) obtenu à partir de (V, ψ), i.e.

L'expression locale de l'inclusion est

$$\psi \circ i \circ \phi^{-1} : \phi(U) = B \to \psi(V) = B \times C \tag{5.28}$$

et elle agit comme

$$(\psi \circ i \circ \phi^{-1})(b) = (\psi \circ i)\left(\psi^{-1}(b, c)\right) = (b, c) \tag{5.29}$$

Donc, on obtient l'application d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans un un ouvert de $\mathbb{R}^m$ donnée par

$$b \mapsto (b, c) \tag{5.30}$$

qui est une inclusion, de rang n. On conclut que i est une immersion. □

Définition 5.19. Soit M une variété différentiable de dimension m. Une *sous-variété régulière de* M est un sous-espace topologique N de M avec la propriété de n-sous-variété, et avec la structure différentiable que cette propriété détermine.

Remarque 5.20. Par le théorème 5.18, si N est une sous-variété régulière, (N, i) es une sous-variété plongée de M. On peut aussi prouver le réciproque: si $f : N \to M$ est un plongement régulier, $f(N)$ a la propriété de n-sous-variété. Donc, le concept de sous-variété régulière est équivalent à celui de sous-variété plongée.

5.2 Construction de sous-variétés par image réciproque

Définition 5.21. Soit $f : M \to N$ une application. Si $q \in f(M)$, on appelle $f^{-1}(q)$ une *fibre de* f.

Définition 5.22. Soit $f : M \to N$ une application différentiable, $\dim(M) \geq \dim(N)$. Soit $f_{\star p} : T_p(M) \to T_q(N)$, la différentielle de f au point $p \in M$, $q = f(p)$. On dit que p est un *point régulier de* f si $f_{\star p}$ est surjective, et on appelle q une *valeur régulière.* Si ce n'est pas le cas, on dit que p est un *point critique de* f, et q une *valeur critique.*

Remarque 5.23. Si $q \notin \mathrm{Im}(f)$, on considère q une valeur régulière.

Exemple 5.24. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Comme $M = N$, $f_{\star p}$ est surjective si et seulement si elle est bijective. Un point critique de f est caractérisé par $f_{\star p} = 0$, i.e. $f'(p) = 0$.

Proposition 5.25. Soit $f : M \to N$ une application différentiable, $\dim(M) = \dim(N)$. Si q est une valeur régulière de f, la fibre $f^{-1}(q)$ est un sous-espace discret de M.

Démonstration: Soit $S = f^{-1}(q)$ la fibre. Comme les dimensions de M et N sont les mêmes, $f_{\star p}$ est bijective, $\forall p \in S$. Donc, par le théorème 4.4, f est un difféomorphisme local au point p, i.e. il y a un voisinage ouvert U de p en M et un voisinage ouvert V de q en N tels que

$$f|_U : U \to V \tag{5.31}$$

est un difféomorphisme. On va maintenant prouver que, si $p \in S$, avec l'ouvert U en (5.31), on a que $U \cap S = \{p\}$. Ceci prouve le théorème, car dans ce cas, alors tout les points de S sont des ouverts, et S est discret. Clairement, $\{p\} \subset U \cap S$, car $p \in U$ et $p \in S$. Mais la réciproque est aussi vraie, i.e. $U \cap S \subset \{p\}$. En effet, si $x \in U \cap S$, $x \in U$ et $f|_U$ est bijective. Mais

$$f|_U(x) = q \tag{5.32}$$

car $x \in S$. Par bijectivité, $x = p$. □

Théorème 5.26. *(de la valeur régulière, ou du rang constant) Soit $f : M \to N$ une application différentiable,* $\dim(M) = m > n = \dim(N)$. *Si q est une valeur régulière de f, $f^{-1}(q)$ est une sous-variété regulière de M, de dimension $m - n$, et fermée comme sous-ensemble de l'espace topologique M.*

Démonstration: La dernière partie est triviale: comme f est continue, l'image inverse d'un fermé est un fermé. Mais le point $\{q\}$ est un fermé de N, car N est Hausdoff, donc $f^{-1}(q)$ est fermé en M.

Par hypothèse, $f_{\star p}$ est surjective, donc on peut utiliser la caractérisation du théorème 4.6. En effet, il s'ensuit de ce théorème qu'il existe une carte locale (U, ϕ) de M, (V, ψ) de N, et un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{R}^{m-n}$ tels que

$$\phi(U) = \psi(V) \times W, \tag{5.33}$$

et f est, dans ces coordonnées locales, une projection,

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) &\to \psi(V) \\ (a, b) &\mapsto a \end{aligned} \tag{5.34}$$

Pour prouver le théorème, il suffit de prouver que, pour tout $p \in S$, il existe une carte locale de M en p, (U, ϕ), tels que

$$\phi(U) = C \times B, \qquad \phi(U \cap S) = \{c\} \times B. \tag{5.35}$$

On prend comme (U, ϕ) la carte locale garantie par 4.6, et on prend $C = \psi(V)$, $B = W$. La première propriété est vraie. Il faut tout simplement prouver que $\phi(U \cap S) = \{c\} \times W$, avec $c = \psi(q)$. On prouve premièrement que $\phi(U \cap S) \subset \{c\} \times W$. Soit $(a, b) \in \phi(U \cap S) \subset \phi(U) = \psi(V) \times W$. On a donc que $a \in \psi(V)$, $b \in W$, et

$$(a, b) = \phi(x), \quad x \in U \cap S. \tag{5.36}$$

On applique maintenant $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ aux deux membres:

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(a, b) = \psi(f(x)). \tag{5.37}$$

Mais $x \in S \Rightarrow f(x) = q$. Donc,

$$a = \psi(q) = c \tag{5.38}$$

et l'inclusion est prouvée. Pour voir l'inclusion réciproque, on prend $(c, b) \in \{c\} \times W \subset \psi(V) \times W$. Mais comme cet ensemble est $\phi(U)$, il doit avoir un $x \in U$ tel que

$$\phi(x) = (c, b). \tag{5.39}$$

On applique à nouveau $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$:

$$(\psi \circ f)(x) = \left(\psi \circ f \circ \phi^{-1}\right)(c, b) = c = \psi(q). \tag{5.40}$$

Comme ψ est un difféomorphisme, en particulier injective, on a que $f(x) = q$ et $x \in S$, i.e. $x \in U \cap S$. On a donc montré la propriété de $(m-n)$-sous-variété pour S, qui est donc une variété regulière de M et en particulier une sous-variété plongée. □

Corollaire 5.27. Si $f : M \to N$ est une submersion, chaque espace $f^{-1}(q)$ est

(a) un sous-espace discret de M, quand $\dim(M) = \dim(N)$,

(b) une sous-variété regulière fermée de M de dimension $\dim(M) - \dim(N)$, quand $\dim(M) > \dim(N)$.

L'espace tangent à une sous-variété est par construction un sous-espace vectorielle du space tanget à la variété où elle est immergée.

Définition 5.28. Soit M une variété différentiable et (N, f) une sous-variété de M, $p \in M$ et $q = f(p)$. On rapelle que

$$f_{\star p} : T_p(N) \to T_q(M) \tag{5.41}$$

est injective, car f est une immersion. On dit que (N, f) *passe par* $q \in M$ si $q \in f(N)$. Le sous-espace vectoriel $f_{\star p}(T_p(N))$ de $T_q(M)$ (qui est isomorphe à $T_p(N)$, par l'injectivité de $f_{\star p}$) s'appelle *sous-espace tangent à* (N, f) *en* q.

Dans le cas de sous-variétés construites comme fibres d'une application, il y a une caractérisation élégante des sous-espaces tangents:

Proposition 5.29. Soit $f : M \to N$ une application différentiable, $\dim(M) = m > n = \dim(N)$. Soit $S = f^{-1}(q) \subset M$, où q est une valeur régulière de f. Le sous-espace tangent de $T_p(M)$ à S en p est le noyau de $f_{\star p}$, i.e.

$$i_{\star p}(T_p(S)) = \ker f_{\star p} \tag{5.42}$$

Démonstration: On considère

$$S \xrightarrow{\quad i \quad} M \xrightarrow{\quad f \quad} N \tag{5.43}$$

La composition $f \circ i|_S$ est l'application constante$_q$. On a aussi, au niveau de différentielles,

$$T_p(S) \xrightarrow{i_{\star p}} T_p(M) \xrightarrow{f_{\star p}} T_q(N) \tag{5.44}$$

Mais

$$(f \circ i)_{\star p} = f_{\star p} \circ i_{\star p} = 0, \quad \forall p \in S. \tag{5.45}$$

Donc,

$$\mathrm{Im}\, i_{\star p} \subset \ker f_{\star p} \tag{5.46}$$

Mais $\mathrm{i}_{\star p}$ est injective, donc

$$\dim(\mathrm{Im}\, i_{\star p}) = \dim(T_p(S)) = m - n. \tag{5.47}$$

Aussi, $f_{\star p}$ est surjective, donc

$$\frac{T_p(M)}{\ker f_{\star p}} \simeq T_q(N), \tag{5.48}$$

et

$$\dim(\ker f_{\star p}) = \dim(T_p(M)) - \dim(T_q(N)) = m - n. \tag{5.49}$$

Comme $\mathrm{Im}\, i_{\star p}$ et $\ker f_{\star p}$ sont des sous-espaces vectoriels de la même dimension, on a que

$$\mathrm{Im}\, i_{\star p} = \ker f_{\star p} \tag{5.50}$$

et on prouvé le résultat. □

Remarque 5.30. La suite (5.44) est un exemple d'une *suite exacte* (courte) d'espaces vectoriels, où l'image d'une flèche est égal au noyau de la flèche suivante. Comme la première flèche est injective et la dernière est surjective, on écrira

$$0 \longrightarrow T_p(S) \xrightarrow{i_{\star p}} T_p(M) \xrightarrow{f_{\star p}} T_q(N) \longrightarrow 0 \tag{5.51}$$

Corollaire 5.31. Soit M une variété différentiable de dimension $m > 1$, $f : M \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Soit $c \in f(M)$ et $S = f^{-1}(c)$. Si $(\mathrm{d}f)_p \neq 0$, pour tout $p \in S$, S est une sous-variété regulière de M de dimension $m - 1$ et le sous-espace de $T_p(M)$ tangent à S en p est l'hyperplan de $T_p(M)$ défini par $(\mathrm{d}f)_p = 0$.

Exemple 5.32. Soit

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 + y^2 \end{aligned} \tag{5.52}$$

Si $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, la différentielle est donnée par

$$(\mathrm{d}f)_p = (2x_0, 2y_0) \tag{5.53}$$

qui est différent de zéro pout tout $p \neq (0, 0)$. Donc,

$$f^{-1}(1) = \mathbb{S}^1 \tag{5.54}$$

est une sous-variété regulière de $\mathbb{R}^2$. L'espace tangent à $\mathbb{S}^1$ en p est donnée par l'hyperplane

$$i_{\star p}(T_p(\mathbb{S}^1)) = \left\{ a \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p + b \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_p : a x_0 + b y_0 = 0 \right\} \subset T_p(\mathbb{R}^2). \tag{5.55}$$

6. Espaces fibrés

6.1 Espaces fibrés et espaces fibrés vectoriels

Définition 6.1. Soient M, F des variétés différentiables. Un *espace fibré sur M avec fibre F* est une variété différentiable E muni d'une application différentiable

$$\pi : E \to M \tag{6.1}$$

qui satisfait l'axiome de *trivialité locale*: pour tour $p \in M$, il existe un voisinage ouvert de p, U, et un difféomorphisme

$$h : U \times F \to \pi^{-1}(U) \tag{6.2}$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\pi"] & & U \\ & U \times F \arrow[ul, "h"] \arrow[ur, "\mathrm{pr}_1"'] & \end{tikzcd} \tag{6.3}$$

est commutatif. On appelle U un ouvert de trivialité, h un difféomorphisme de trivialité, E l'espace total du fibré, M l'espace base du fibré, π la projection et F la fibre. On dénotera par (E, π, M, F) un espace fibré de base M et fibre F, et on appelle $E_p = \pi^{-1}(p)$ la *fibre* sur p.

On écrira:

$$\begin{aligned} h^{-1} : \pi^{-1}(U) &\to U \times F \\ v &\mapsto (\pi(v), \rho(v)) \end{aligned} \tag{6.4}$$

On a les propriétés suivantes des espaces fibrés:

1. $\dim E = \dim, M + \dim F$. C'est immédiat: $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert en E, donc sous-variété ouverte de dimension $\dim E$, et U est une sous-variété ouverte de M de dimension $\dim M$. Comme $\pi^{-1}(U) \approx U \times F$, on a l'égalité.

2. π est une submersion surjective. La preuve est proposée comme exercice.

3. $\forall p \in M$, la fibre $E_p = \pi^{-1}(p)$ est une sous-variété regulière fermé de E, difféomorphe à F. La première partie est une conséquence du point antérieur, et la deuxième partie sera prouvée en exercice.

Définition 6.2. Soients (E, M, π, F) un espace fibré, où F est un espace vectoriel réel de dimension finie, et les fibres E_p sont des espaces vectoriels $\forall p \in M$. On dit que E est un espace fibré vectoriel sur M avec fibre F et projection π si les difféomorphismes de trivialité satisfont

$$\begin{aligned} h(x, z + z') &= h(x, z) + h(x, z'), \qquad z,\, z' \in F, \\ h(z, \lambda z) &= \lambda h(x, z), \qquad z \in F, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Notez que l'application $h_x : F \to E_x$ qui envoie z en $h(x, z)$ est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Définition 6.3. Soient (E, π, M, F) et (E', π', M', F') des espaces fibrés. Un homomorphisme d'espaces fibrés est un pair d'applications différentiables, $(f, \tilde{f})$, tels que

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "\tilde{f}"'] & M' \end{tikzcd} \tag{6.6}$$

est commutatif. En plus, s'il s'agit de fibrés vectoriels, on demande aussi que

$$f|_{E_x} : E_x \to E'_{\tilde{f}(x)} \tag{6.7}$$

soit linéaire $\forall x \in M$.

Définition 6.4. Un isomorphisme d'espaces fibrés vectoriels est un homomorphisme $(f, \tilde{f})$ où f et $\tilde{f}$ sont des difféomorphismes.

Définition 6.5. Soient E, E' des espaces fibrés vectoriels sur M avec projections

$$\pi : E \to M, \qquad \pi' : E' \to M \tag{6.8}$$

Un homomorphisme sur la base M est une application différentiable $f : E \to E'$ tel que

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & E' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & M & \end{tikzcd} \tag{6.9}$$

est commutatif, et

$$f|_{E_x} : E_x \to E'_x \tag{6.10}$$

est linéaire. En autres mots, c'est un homomorphisme d'espaces fibrés avec $\tilde{f} = \mathrm{id}_M$. Si f est un difféomorphisme, on dit que f est un isomorphisme d'espaces fibrés vectoriels.

Définition 6.6. On dit qu'un espace fibré (E, π, M, F) est *trivial* s'il est isomorphe, sur la base M, à l'espace fibré trivial $(M \times F, \pi_1, M, F)$.

Exemple 6.7. Le cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ est un espace fibré vectoriel trivial sur $\mathbb{S}^1$, avec fibre $\mathbb{R}$.

Exemple 6.8. On définit la *bande de Moebius* comme l'espace

$$E = \frac{[0,1] \times \mathbb{R}}{\sim}, \qquad (0, t) \sim (1, -t). \tag{6.11}$$

On peut voir qu'il s'agit d'une variété différentiable de dimension 2 (il s'agit en fait d'une variété quotiente, voir exercices). Il contient un cercle quand $t = 0$ (le segment $[0, 1]$ avec ses extrêmes identifiés). Il y a aussi une projection

$$\pi : E \to \mathbb{S}^1 \tag{6.12}$$

et on peut montrer qu'il s'agit d'un fibré non-trivial.

On a aussi la proposition suivante:

Proposition 6.9. Soient E, E' espaces fibrés vectoriels sur M avec fibre F et projections π, π'. Si $f : E \to E'$ est homomorphisme tel que

$$f|_{E_x} : E_x \to E'_x \tag{6.13}$$

est un isomorphisme, on a que f est aussi un difféomorphisme, donc un isomorphisme d'espaces fibrés vectoriels sur la base M.

Donc, pour vérifier qu'un homomorphisme d'espaces fibrés vectoriels est un isomorphisme, il suffit de montrer qu'il induit un isomorphisme das chaque fibre.

Définition 6.10. Soiet (E, π, M, F) un espace fibré. Une *section* de E est une application continue

$$\sigma : M \to E \tag{6.14}$$

telle que

$$\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_M. \tag{6.15}$$

Si U est un ouvert de M, une *section locale* de E sur U est une application continue

$$\sigma : U \to E \tag{6.16}$$

telle que

$$\pi \circ \sigma = i : U \to M \tag{6.17}$$

Les sections ont les propriétés suivantes:

1. Si $\sigma : M \to E$ est une section difféntiable, $\sigma(M)$ est une sous-variété plongée de E (i.e. σ est un plongement regulière). La preuve sera faite en exercice.

2. Un difféomorphisme de trivialité définit sections locales différentiables. En effet, soit $z_0 \in F$, et

$$\begin{aligned} i_{z_0} : U &\to U \times F \\ x &\mapsto (x, z_0). \end{aligned} \tag{6.18}$$

   On considère maintenant la composition

$$\sigma = i \circ h \circ i_{z_0} \tag{6.19}$$

   i.e.

$$U \xrightarrow{i_{z_0}} U \times F \xrightarrow{h} \pi^{-1}(U) \xrightarrow{i} E \tag{6.20}$$

   Elle est une section différentiable.

3. Si (E, π, M, F) est un espace fibré vectoriel, il existe toujours une section globale, la section zéro:

$$\begin{aligned} \sigma : M &\to E \\ x &\mapsto 0_x \in E_x = \pi^{-1}(x). \end{aligned} \tag{6.21}$$

Définition 6.11. Soit (E, π, M, F) un espace fibré vectoriel, U ouvert de M, $\sigma_1, \cdots, \sigma_\ell$ sections de U en E. On dit que ces sections sont linéairement indépendantes si, $\forall x \in U$, $\sigma_1(x), \cdots, \sigma_\ell(x) \in E_x$ sont linéairement indépendantes.

Proposition 6.12. Soit F un espace vectoriel de dimension k et (E, π, M, F) un espace fibré vectoriel avec fibre F. Alors, (E, π, M, F) est un fibré trivial si et seulement si il y a k sections globales linéairement indépendantes $\sigma_1, \cdots, \sigma_k : M \to E$

Démonstration: La direction "$\Rightarrow$" est facile à prouver. Si (E, π, M, F) est trivial, il existe un isomorphisme de fibrés vectoriels

$$h : M \times F \to E \tag{6.22}$$

tel que $\pi \circ h = \pi_1$, et

$$h\big|_{\{x\}\times F} \colon \{x\} \times F \to E_x \tag{6.23}$$

est un isomorphisme. Soit $\{v_1, \cdots, v_k\}$ une base de F. On définit

$$\sigma_j(x) = h(x, v_j), \qquad j = 1, \cdots, k. \tag{6.24}$$

On a

$$\sigma_j = h \circ i_{v_j}, \tag{6.25}$$

où

$$\begin{aligned} i_{v_j} : M &\to M \times F \\ x &\mapsto (x, v_j) \end{aligned} \tag{6.26}$$

Clairement il s'agit d'une application différentiable, et elle est une section car $\pi \circ \sigma_j = \mathrm{id}_M$. Il reste à vérifier que, $\forall x \in M$,

$$\sigma_1(x), \cdots, \sigma_k(x) \in E_x \tag{6.27}$$

sont linéairement indépendants. Mais

$$\sigma_j(x) = h_j(x, v_j) = h\big|_{\{x\}\times F}(v_j), \qquad j = 1, \cdots, k. \tag{6.28}$$

Comme les $\{v_j\}$ sont linéairements indépendantes (ils forment une base de F) et $h\big|_{\{x\}\times F}$ est un isomorphisme, on déduit que les $\sigma_j(x)$ sont indépendants.

On montre maintenant "$\Leftarrow$". Soit $\{v_1, \cdots, v_k\}$ une base de F, et $\{y^1, \cdots, y^k\}$ la base dual. On considère l'application

$$\begin{aligned} h_j : M \times F &\to E \\ (x, z) &\mapsto y^j(z)\sigma_j(x) \end{aligned} \tag{6.29}$$

Il s'agit d'un homomorphisme de fibrés vectoriels: on peut vérifier qu'elle est différentiable. En plus

$$\pi \circ h_j(x, z) = x \tag{6.30}$$

car $y^j(z)\sigma_j(x) \in E_x = \pi^{-1}(x)$. Finalement, la restriction aux fibres

$$h_j(x) : F \to E_x \tag{6.31}$$

est linéaire. On considère maintenant l'homomorphisme de $M \times F$ en E

$$h = \sum_{j=1}^{k} h_j. \tag{6.32}$$

On vérifie aisément qu'il définit un isomorphisme en chaque fibre: la restriction à $\{x\} \times F$ mène la base $\{v_j\}_{j=1,\cdots,k}$ dans la base $\{\sigma_j(x)\}_{j=1,\cdots,k}$, car

$$h(x, v_j) = \sigma_j(x). \tag{6.33}$$

Par la proposition (6.9), elle est donc un isomorphisme de fibrés, et la proposition est prouvée. $\square$

6.2 Le fibré tangent

Soit M une variété différentiable de dimension n. On définit

$$T(M) = \bigcup_{p\in M} T_p(M) \tag{6.34}$$

qui est une union disjointe. On veut montrer que $T(M)$ est un espace fibré vectoriel sur M avec fibre $\mathbb{R}^n$. On rappelle que, pour chaque $p \in M$, on a un isomorphisme

$$\begin{aligned} \theta^p_\phi :& \mathbb{R}^n \to T_p(M) \\ a \mapsto& [U,\phi,a]_p = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \end{aligned} \tag{6.35}$$

On considère l'application

$$\begin{aligned} \pi : T(M) &\to M \\ X &\mapsto \pi(X) = p \text{ si } X \in T_p(M) \end{aligned} \tag{6.36}$$

Elle est clairement surjective.

Soit maintenant (U,ϕ) une carte locale de M, et l'application

$$\begin{aligned} h_\phi : U \times \mathbb{R}^n &\to \pi^{-1}(U) = \bigcup_{p\in U} T_p(M) \\ (p,a) &\mapsto \theta^p_\phi(a) = [U,\phi,a]_p. \end{aligned} \tag{6.37}$$

Elle a une inverse:

$$h_\phi^{-1}(X) = \left(\pi(X), \left(\theta^p_\phi\right)^{-1}(X)\right) \in U \times \mathbb{R}^n, \qquad X \in \pi^{-1}(U), \tag{6.38}$$

et on peut écrire

$$\left(\theta^p_\phi\right)^{-1}(X) \equiv \rho_\phi(X) = \left(X(x^1), \cdots, X(x^n)\right). \tag{6.39}$$

Aussi, il est évident par construction que la restriction

$$h_\phi\big|_{\{p\}\times\mathbb{R}^n} : \{p\} \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(p) = T_p(M) \tag{6.40}$$

est un isomorphisme.

Soient maintenant (U,ϕ) et (V,ψ) cartes locales de M, avec $U \cap V \neq \emptyset$. On considère l'application

$$h_\psi^{-1} \circ h_\phi : (U\cap V) \times \mathbb{R}^n \to (U\cap V)\times\mathbb{R}^n \tag{6.41}$$

qui envoie

$$(p,a) \mapsto \theta^p_\phi(a) = [U,\phi,a]_p \mapsto (p, D(\psi\circ\phi^{-1})(\phi(p))(a)) \tag{6.42}$$

Elle est différentiable, car $\psi\circ\phi^{-1}$ est différentiable. Comme cela est vraie pour toute composition, on a que $h_\phi^{-1} \circ h_\psi$ est aussi différentiable, et ces applications sont des difféomorphismes.

On va maintenant définir une structure de variété différentiable sur $T(M)$.

Proposition 6.13. L'espace $T(M)$ a une structure naturelle de variété topologique, induite par la structure de variété topologique de M.

Démonstration: Premièrement, on veut avoir une structure d'espace topologique. Pour cela, on choisit un atlas $\mathcal{A}$ de M, avec cartes locales (U, ϕ). Soit $W \subset T(M)$. On dira que W est un ouvert de $T(M)$ si et seulement si $h_\phi^{-1}(W)$ est un ouvert de $U \times \mathbb{R}^n$ pout toute carte locale $(U, \phi) \in \mathcal{A}$.

Avec cette topologie, les applications h_ϕ sont continues. On va montrer qu'elles sont en fait des homéomorphismes. Soit

$$h_\psi : V \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(V) \tag{6.43}$$

qui est bijective et continue. Soit G un ouvert de $V \times \mathbb{R}^n$. Il faut montrer que $h_\psi(G)$ est un ouvert de $T(M)$ i.e. que

$$h_\phi^{-1}\left(h_\psi(G)\right) = \left(h_\psi^{-1} \circ h_\phi\right)^{-1}(G) \tag{6.44}$$

est un ouvert de $U \times \mathbb{R}^n$, pout toute carte locale $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. Mais $h_\psi^{-1} \circ h_\phi$ est différentiable, donc continue, et l'ensemble (6.44) est un ouvert en $(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$, donc un ouvert en $U \times \mathbb{R}^n$.

On montre maintenant que $\pi : M \to T(M)$ est continue. On sait que le triangle

$$\begin{tikzcd} U \times \mathbb{R}^n \arrow[rr, "h_\phi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & \pi^{-1}(U) \arrow[dl, "\pi|_{\pi^{-1}(U)}"] \\ & U & \end{tikzcd} \tag{6.45}$$

est commutatif. Donc,

$$\pi|_{\pi^{-1}(U)} = \pi_1 \circ h_\phi^{-1} \tag{6.46}$$

est continue, car elle est composition de continues. Mais les ensembles $\pi^{-1}(U)$, $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ forment un recouvrement ouvert de $T(M)$:

$$M = \bigcup_{(U,\phi)\in\mathcal{A}} U \Rightarrow T(M) = \bigcup_{(U,\phi)\in\mathcal{A}} \pi^{-1}(U) \tag{6.47}$$

Donc, comme π est continue dans chaque ouvert du recouvrement, elle est continue en $T(M)$.

On va montrer maintenant que $T(M)$ est Hausdorff avec la topologie que l'on a définie.

Soient $v, w \in T(M)$, $v \neq w$. On a deux cas différents:

1. Si $p = \pi(v) \neq \pi(w) = q$, comme M est Hausdorff, on a U, V voisinages ouverts de p, q, respectivement, tels que $U \cap V = \emptyset$. Mais on a donc

   $$\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) = \emptyset \tag{6.48}$$

   et on peut choisier $\pi^{-1}(U)$ comme voisinage ouvert de v, et $\pi^{-1}(W)$ comme voisinage ouvert de w pour la condition Hausdorff.

2. Si $\pi(v) = \pi(w) = p$, on prend une carte locale de M, (U, ϕ), avec $p \in U$. On considère l'homéomorphisme

   $$h_\phi : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U) \subset T(M). \tag{6.49}$$

Comme $v, w \in \pi^{-1}(U)$, on prend $h_\phi^{-1}(v) \neq h_\psi^{-1}(w)$, car h_ϕ est bijective. Ces deux points appartiennent à $U \times \mathbb{R}^n$, qui est Hausdorff. Donc, il y a ouverts disjoints W_1, W_2 en $U \times \mathbb{R}^n$ tels que

$$h_\phi^{-1}(v) \in W_1, \qquad h_\phi^{-1}(w) \in W_2, \qquad W_1 \cap W_2 = \emptyset. \tag{6.50}$$

On prend maintenant les ouverts $h_\phi(W_1)$, $h_\phi(W_2)$ en $\pi^{-1}(U)$ (et donc en $T(M)$). On a

$$v \in h_\phi(W_1), \qquad w \in h_\phi(W_2), \qquad h_\phi(W_1) \cap h_\phi(W_2) = \emptyset. \tag{6.51}$$

On est prêt maintenant à montrer que $T(M)$ est une variété topologique de dimensions $2n$.

Soit $p \in T(M)$. On prend une carte locale (U, ϕ) pour $\pi(p)$, et donc il y a un ouvert $\pi^{-1}(U)$ qui contient p. Sur chacun de ces ouverts on définit un homéomorphisme

$$\tilde{\phi} : \pi^{-1}(U) \to \phi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} \tag{6.52}$$

à travers le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\widetilde{\phi}"] \arrow[dr, "h_\phi^{-1}"'] & & \phi(U) \times \mathbb{R}^n \\
& U \times \mathbb{R}^n \arrow[ur, "\phi + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}"'] &
\end{tikzcd} \tag{6.53}$$

Comme $\widetilde{\phi}$ est une composition d'homéomorphismes, il s'agit d'un homéomorphisme. □

On prouve maintenant que $T(M)$ est en fait une variété différentiable de dimension $2n$. On prend comme atlas de $T(M)$:

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \{(\pi^{-1}(U), \widetilde{\phi}) : (U, \phi) \in \mathcal{A}\} \tag{6.54}$$

Il faut vérifier que

$$\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\phi}^{-1} : \widetilde{\phi}\left(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\right) \to \widetilde{\psi}\left(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\right) \tag{6.55}$$

est différentiable de classe C^∞. Mais

$$\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\phi}^{-1} = (\psi \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \circ \left(h_\psi^{-1} \circ h_\phi\right) \circ \left(\phi^{-1} \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\right) \tag{6.56}$$

est une composition d'applications différentiables, donc on a prouvé ce que l'on voulait.

Finalement, on va montrer que $T(M)$ est un espace fibré sur M avec fibre $\mathbb{R}^n$. Comme difféomorphismes de trivialité, on prend h_ϕ. Comme

$$h_\phi = \widetilde{\phi}^{-1} \circ (\phi \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \tag{6.57}$$

est une composition de difféomorphismes, elle est un difféomorphisme. Pour voir que π est différentiable, on regarde à nouveau le triangle (6.45), qui garantisait la continuité de π, et on voit bien qu'il garantit maintenant sa différentiabilité, car π_1 et h_ϕ^{-1} sont différentiables. Finalement, on vérifie la linéarité de h_ϕ dans les fibres. Mais cela s'ensuit de la linérarité de θ_ϕ^p.

Soient M, N variétés différentiables de dimensions m et n, respectivement, et $f : M \to N$ une application différentiable. On va maintenant définir un homomorphisme d'espaces fibrés vectoriels

$$\begin{aligned} f_\star &: T(M) \to T(N) \\ X \in T_p(M) &\mapsto f_\star(X) = f_{\star p}(X) \in T_{f(p)}(N). \end{aligned} \tag{6.58}$$

Il faut montrer que $f_\star$ est différentiable, qu'elle induit un homomorphisme sur chaque fibre, et qu'elle commute avec les projections. Le dernier point est le plus facile à montrer: on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} T(M) \arrow[r, "f_\star"] \arrow[d, "\pi"] & T(N) \arrow[d, "\pi'"'] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd} \tag{6.59}$$

La linéarité dans les fibres est aussi claire, car $f_{\star p}$ est linéaire. On va donc prouver que $f_\star$ est différentiable.

Soit $v \in T(M)$, $\pi(v) \in M$. On prend une carte locale de M, (U, ϕ), avec $\pi(v) \in U$, et (V, ψ) une carte locale de N avec $f(\pi(v)) \in V$ et $f(U) \subset V$ (on peut toujours s'arranger pour cela, car si l'ouvert de départ ne satisfait pas cela, on peut restreindre la carte locale à $f^{-1}(V) \cap U$). On considère maintenant la restriction de $f_\star$ à $\pi^{-1}(U)$. On a

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "f_\star"] & \pi^{-1}(V) \\ U \times \mathbb{R}^m \arrow[r] \arrow[u, "h_\phi"'] & V \times \mathbb{R}^n \arrow[u, "h_\psi"] \end{tikzcd} \tag{6.60}$$

Pour vérifier la différentiabilité de $f_\star$, on doit étudier son expression en cartes locales de $T(M)$, $T(N)$, i.e. on doit étudier

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "f_\star"] & \pi^{-1}(V) \\ U \times \mathbb{R}^m \arrow[r, "h_\psi^{-1} \circ f_\star \circ h_\phi"'] \arrow[u, "h_\phi"'] \arrow[d, "\phi \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}"'] & V \times \mathbb{R}^n \arrow[u, "h_\psi"] \arrow[d, "\psi \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}"] \\ \phi(U) \times \mathbb{R}^m \arrow[r, "\widetilde{\psi} \circ f_\star \circ \widetilde{\phi}^{-1}"'] & \psi(V) \times \mathbb{R}^n \end{tikzcd} \tag{6.61}$$

L'expression locale de $h_\psi^{-1} \circ f_\star \circ h_\phi$, comme application entre $U \times \mathbb{R}^m$ et $V \times \mathbb{R}^n$, est $\widetilde{\psi} \circ f_\star \circ \widetilde{\phi}^{-1}$, donc il faut montrer que

$$\begin{aligned} h_\psi^{-1} \circ f_\star \circ h_\phi : U \times \mathbb{R}^m &\to V \times \mathbb{R}^n \\ (p, a) &\mapsto \big(f(p), D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(p))(a)\big) \end{aligned} \tag{6.62}$$

est différentiable. Mais C'est clairement le cas, car la première composante est différentiable et la deuxième aussi. On peut vérifier que

$$(\mathrm{id}_M)_\star = \mathrm{id}_{T(M)}, \qquad (g \circ f)_\star = g_\star \circ f_\star \tag{6.63}$$

On a donc un foncteur “tangent” entre la categorie des variétés et la catégorie d'espaces fibrés vectoriels.

7. Champs de vecteurs

Définition 7.1. Soit M une variété différentiable de dimension n. Un *champ de vecteurs* X sur M est une section différentiable du fibré tangent, i.e.

$$X : M \to T(M), \tag{7.1}$$

différentiable avec $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$. On écrira $X_p \equiv X(p)$. Un champ de vecteurs local sur l'ouvert $U \subset M$ est une section locale $X : U \to T(M)$.

Soit (U, ϕ) une carte locale de M, $\phi = (x^1, \cdots, x^n)$, et soit $p \in U$. Comme $X_p \in T_p(M)$, on peut toujours l'écrire comme

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p, \qquad \lambda^i : U \to \mathbb{R}. \tag{7.2}$$

On appelle λ^i les *composantes* de X par rapport à la carte locale (U, ϕ).

Proposition 7.2. Le champ de vecteurs X est différentiable en U si et seulement si $\lambda^i : U \to \mathbb{R}$ sont des fonctions différentiables, pour $i = 1, \cdots, n$.

Démonstration: Il faut analyser l'expression locale de X comme fonction entre deux variétés différentiables. On a

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "X|_U"] \arrow[d, "\phi"] & \pi^{-1}(U) \arrow[d, "\widetilde{\phi}"'] \\ \phi(U) \arrow[r, "\widetilde{\phi} \circ X \circ \phi^{-1}"'] & \phi(U) \times \mathbb{R}^n \end{tikzcd} \tag{7.3}$$

L'expression locale est facile à trouver,

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi} \circ X \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n &\to \phi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} \\ (x^1, \cdots, x^n) &\mapsto \left((x^1, \cdots, x^n), \left(\lambda^1 \phi^{-1}(x), \cdots, \lambda^n \phi^{-1}(x) \right) \right) \end{aligned} \tag{7.4}$$

et on voit clairement que cette application est différentiable si et seulement si

$$\lambda^i \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R} \tag{7.5}$$

est différentiable, $i = 1, \cdots, n$. Mais ceci est la condition de différentiabilité de λ^i. □

Notez que, si (U, ϕ) est une carte locale de M, $\phi = (x^1, \cdots, x^n)$, on a sur U un champ de vecteurs local défini par

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} : U &\to T(M) \\ p &\mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \end{aligned} \tag{7.6}$$

et la restriction à U d'un champ de vecteurs X peut toujours s'écrire comme

$$X|_U = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{7.7}$$

On va dénoter

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(M) &= \{f : M \to \mathbb{R},\ \text{fonction différentiable}\}, \\ \mathcal{X}(M) &= \{X : M \to T(M),\ \text{champ de vecteurs différentiable}\} \end{aligned} \tag{7.8}$$

On peut définir une addition et un produit par scalaires en $\mathcal{X}(M)$, de la manière naturelle, et en plus on peut définir un produit par fonctions,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(M) \times \mathcal{X}(M) &\to \mathcal{X}(M) \\ (f, X) &\mapsto fX \end{aligned} \tag{7.9}$$

comme suit:

$$\begin{aligned} fX : M &\to T(M) \\ p &\mapsto (fX)(p) = f(p)X(p) \end{aligned} \tag{7.10}$$

On voit donc que $\mathcal{X}(M)$ est un espace vectoriel réel et un module sur $\mathcal{F}(M)$.

Définition 7.3. Soit $X \in \mathcal{X}(M)$, $f \in \mathcal{F}(M)$. On définit

$$\begin{aligned} Xf : M &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto (Xf)(p) = X_p(f) \end{aligned} \tag{7.11}$$

On peut montrer facilement que $Xf \in \mathcal{F}(M)$, car son expression locale dans une carte locale (U, ϕ) est

$$Xf \circ \phi^{-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \phi^{-1}(x) \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p \tag{7.12}$$

où

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p = D_i\left(f \circ \phi^{-1}\right)(x). \tag{7.13}$$

7.1 Courbes intégrales

Soit M une variété différentiable de dimension n, et soit

$$\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \to M \tag{7.14}$$

une courbe différentiable. On rappelle l'exemple 3.15, où on l'a montré que

$$\alpha_{\star t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)_t = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}r}\right)_t \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\alpha(t)} \tag{7.15}$$

Définition 7.4. Soit X un champ de vecteurs sur M. Une courbe différentiable $\alpha : (a, b) \to M$ est une courbe intégrale de X si

$$\alpha_{\star t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)_t = X_{\alpha(t)} \tag{7.16}$$

Si $\alpha(t) \in U$, avec (U, ϕ) carte locale de M, où X a l'expression

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p , \tag{7.17}$$

la condition de courbe intégrale au point $\alpha(t)$ est

$$\left(\frac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}r} \right)_t = \lambda^i \left(\alpha(t) \right), \qquad i = 1, \cdots , n \tag{7.18}$$

ou encore

$$\left(\frac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}r} \right)_t = (\lambda^i \circ \phi^{-1}) \big(\alpha^1(t), \cdots , \alpha^n(t) \big), \qquad i = 1, \cdots , n \tag{7.19}$$

avec

$$\lambda^i \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}. \tag{7.20}$$

On a utilisé que

$$(\phi \circ \alpha)(t) = \big(\alpha^1(t), \cdots , \alpha^n(t) \big) \in \mathbb{R}^n. \tag{7.21}$$

Donc, il s'agit d'un système d'équations différentielles ordinaires sur $\mathbb{R}^n$.

On rappelle maintenant certains résultats pour les équations différentielles ordinaires.

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un ouvert, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et

$$g : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n \tag{7.22}$$

une fonction continue. Une application différentiable

$$u : J \subset I \to \Omega \tag{7.23}$$

est une solution de l'équation différentielle

$$x' = g(t, x) \tag{7.24}$$

si elle vérifie

$$u'(t) = g\left(t, u(t)\right), \quad \forall t \in J. \tag{7.25}$$

En composantes, $u = (u^1, \cdots , u^n)$, $g = (g^1, \cdots , g^n)$, et

$$\left(\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}r} \right)_t = g^i(t, u^1(t), \cdots , u^n(t)), \quad i = 1, \cdots , n. \tag{7.26}$$

Théorème 7.5. *(Existence et unicité des solutions). Si g est de classe C^k, on a que, $\forall t_0 \in I$, $\forall a \in \Omega$, on peut trouver un ouvert $J \subset I$ avec $t_0 \in J$, et une application*

$$u : J \to \Omega \tag{7.27}$$

de classe C^{k+1}, tels que u est la seule solution de l'équation différentielle (7.24) en J qui satisfait la condition initiale

$$u(t_0) = a. \tag{7.28}$$

Théorème 7.6. *(Dépendance des conditions initiales). Si g est de classe C^k, $\forall (t_0, a) \in I \times \Omega$, il existe un ouver $J \subset I$, $t_0 \in I$, et un ouvert $A \subset \Omega$, avec $a \in A$, et une fonction de classe C^k*

$$f : J \times A \to \Omega \tag{7.29}$$

tel que, $\forall a \in A$, l'application

$$\begin{aligned} f_a : J &\to \Omega \\ t &\mapsto f_a(t) = f(t, a) \end{aligned} \tag{7.30}$$

est la seule solution de (7.24) qui satisfait $f(t_0, a) = a$

Avec ces résultats, c'est facile à montrer que tout champ de vecteurs a, localement, des courbes intégrales.

Proposition 7.7. Soit X un champ de vecteurs sur M, $p \in M$. Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, il y a un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ avec $t_0 \in J$, et une courbe intégrale

$$\alpha : J \to M \tag{7.31}$$

avec $\alpha(t_0) = p$.

Démonstration (sketch): il suffit de prendre une carte locale (U, ϕ), considérer l'équation différentielle (7.19) en $\phi(U)$ et utiliser le théorème 7.5. □

Définition 7.8. Soit $\alpha : (a, b) \to M$ une courbe intégrale de X avec $0 \in (a, b)$ et $\alpha(0) = p$. On l'appelle une courbe intégrale de X avec point initial p. Soit $J(p)$ l'union de tous les domaines de toutes les courbes intégrales de X avec point initial p. Dans cet intervalle ouvert on définit la *courbe intégral maximale* de X avec point initial p:

$$\begin{aligned} \alpha_p : J(p) &\to M \\ t &\mapsto \alpha_p(t) = \alpha(t). \end{aligned} \tag{7.32}$$

Définition 7.9. On dit qu'un champ de vecteurs X est *complet* si $J(p) = \mathbb{R}$, pour tout $p \in M$.

Exemple 7.10. Soit $M = \mathbb{R}^2$, et on prend la carte globale $(\mathbb{R}^2, \phi)$ avec $\phi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} = (x^1, x^2)$. Soit le champ de vecteurs

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1} + \cos x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \tag{7.33}$$

avec composantes

$$(\lambda^1 \circ \phi^{-1})(x^1, x^2) = 1, \quad (\lambda^2 \circ \phi^{-1})(x^1, x^2) = \cos x^1. \tag{7.34}$$

Les équations différentielles qui définissent les courbes intégrales sont

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\alpha^1}{\mathrm{d}t} &= 1, \\ \frac{\mathrm{d}\alpha^2}{\mathrm{d}t} &= \cos \alpha^1, \end{aligned} \tag{7.35}$$

que l'on intègre immédiatement,

$$\alpha^1(t) = t + c, \qquad \alpha^2(t) = \sin(t + c) + k. \tag{7.36}$$

Si l'on prend comme condition initiale $\alpha(0) = (a^1, a^2)$, on trouve

$$\alpha(t) = \big(t + a^1, \sin(t + a^1) + a_2 - \sin a^1\big) \tag{7.37}$$

Le domaine de cette courbe est $\mathbb{R}$, donc il s'agit d'une courbe maximal, pour tout $(a^1, a^2) \in \mathbb{R}^2$. Cela veut dire que le champ X est complet

Exemple 7.11. Soit $M = \mathbb{R}$ et le champ de vecteurs

$$X = r^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \tag{7.38}$$

L'équation différentielle correspondante pour la courbe $\alpha(t)$ est

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \alpha^2 \tag{7.39}$$

qui est intégré immédiatement

$$\alpha(t) = -\frac{1}{t+c}. \tag{7.40}$$

Si l'on impose la condition initiale $\alpha(0) = a$ on obtient

$$\alpha(t) = \frac{a}{1 - at}. \tag{7.41}$$

Pour calculer la courbe maximale, on a trois cas différents:

1. Si $a = 0$ on a $J(0) = \mathbb{R}$ et la courbe intégrale est $\alpha(t) = 0$.
2. Si $a > 0$, on a
$$J(a) = \left(-\infty, \frac{1}{a}\right) \tag{7.42}$$
3. Si $a < 0$, on a
$$J(a) = \left(\frac{1}{a}, \infty\right) \tag{7.43}$$

   Dans ces deux derniers cas, la courbe intégrale maximale est de la forme

$$\begin{aligned} \alpha_a : J(a) &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{a}{1 - at} \end{aligned} \tag{7.44}$$

On voit bien que ce champ de vecteurs n'est pas complet, car pour $a \neq 0$ la courbe maximale n'a comme domaine tout $\mathbb{R}$.

Définition 7.12. Un groupe uniparamétrique de transformations d'une variété différentiable M est une application différentiable

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times M &\to M \\ (t, x) &\mapsto \phi(t, x) = \phi_t(x) \end{aligned} \tag{7.45}$$

qui vérifie:

1. $\phi_0 = \mathrm{id}_M$

2. $\forall t, s \in \mathbb{R}$, $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$.

Notez que $\phi_t : M \to M$ est un difféomorphisme, car elle est différentiable $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\phi_t = \phi \circ i_t, \tag{7.46}$$

où i_t est l'inclusion

$$\begin{aligned} i_t : M &\to \mathbb{R} \times M \\ p &\mapsto (t, p) \end{aligned} \tag{7.47}$$

En plus,

$$(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t} \tag{7.48}$$

car

$$\phi_t \circ \phi_{-t} = \phi_{-t} \circ \phi_t = \phi_0 = \mathrm{id}_M. \tag{7.49}$$

L'orbite de p pour ϕ est

$$\begin{aligned} \phi_p : \mathbb{R} &\to M \\ t &\mapsto \phi_p(t) = \phi(t, p) \end{aligned} \tag{7.50}$$

Il s'agit d'une courbe différentiable, car

$$\phi_p = \phi \circ i_p, \tag{7.51}$$

avec

$$\begin{aligned} i_p : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \times M \\ t &\mapsto (t, p) \end{aligned} \tag{7.52}$$

Définition 7.13. Soit ϕ un groupe uniparamétrique de transformations. Le champ de vecteurs sur M défini par

$$\begin{aligned} X : M &\to T(M) \\ p &\mapsto X_p = (\phi_p)_{\star 0} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)_0 \in T_p(M). \end{aligned} \tag{7.53}$$

s'appelle *générateur infinitésimal du groupe uniparamétrique de transformations* ϕ.

On peut montrer que le champ de vecteurs défini de cette façon est différentiable. Par construction, l'orbite de p est une courbe intégrale maximale de X avec point initial p. On a aussi la formule suivante pour l'action de X en p. Soit $f \in F(p)$. Donc,

$$\left[(\phi_p)_{\star 0} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)_0\right](f) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)_0 (f \circ \phi_p) = \lim_{t \to 0} \frac{(f \circ \phi_p)(t) - (f \circ \phi_p)(0)}{t} \tag{7.54}$$

et on trouve

$$X_p(f) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\phi_t(p)) - f(p)}{t} \tag{7.55}$$

Exemple 7.14. Soit $M = \mathbb{R}^2$. On considère

$$\phi_t(x_1, x_2) = (x_1 + t, x_2 - \sin x_1 + \sin(x_1 + t)) \tag{7.56}$$

Elle est C^∞ comme application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. On a que

$$\phi_0(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \tag{7.57}$$

et on voit aussi que

$$(\phi_t \circ \phi_s)(x_1, x_2) = \phi_{t+s}(x_1, x_2). \tag{7.58}$$

On va calculer maintenant son générateur infinitésimal:

$$\begin{aligned} X_a = (\phi_a)_{\star 0}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)_0 &= \sum_{i=1}^{2}\left[(\phi_a)_{\star 0}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)_0\right](x^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a \\ &= \sum_{i=1}^{2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)_0 (x^i \circ \phi_a)\right]\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a \end{aligned} \tag{7.59}$$

On a que

$$(x^1 \circ \phi_a)(t) = a_1 + t, \qquad (x^2 \circ \phi_a)(t) = a_2 - \sin a_1 + \sin(a_1 + t). \tag{7.60}$$

donc

$$X_a = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_a + \cos a_1 \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_a \tag{7.61}$$

donc le champ de vecteurs est

$$X = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right) + \cos x^1 \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right) \tag{7.62}$$

Soit X un champ de vecteurs, et

$$\alpha_p : J_p \to M \tag{7.63}$$

sa courbe intégrale maximale avec point initial p. On considère l'ensemble

$$W = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M : t \in J(p)\} = \bigcup_{p \in M} J(p) \times \{p\}. \tag{7.64}$$

On définit aussi

$$\begin{aligned} \phi : W &\to M \\ (t, p) &\mapsto \phi(t, p) = \alpha_p(t). \end{aligned} \tag{7.65}$$

Cette application vérifie

1. $\phi_t(p) = \alpha_p(t)$, donc $\phi_0(p) = \alpha_p(0) = p$, $\forall p \in M$.

2. $\phi_t \circ \phi_s(p) = \phi_{t+s}(p)$. En effet, soit $J(p) = (a, b)$, $\alpha_p : (a, b) \to M$ une courbe intégrale maximale de X avec point initial p. Si $s \in (a, b)$, $q = \alpha_p(s)$, la courbe intégrale maximale avec point initial q est

$$\begin{aligned} \alpha_q : (a - s, b - s) &\to M \\ t &\mapsto \alpha_q(t) = \alpha_p(t + s). \end{aligned} \tag{7.66}$$

Elle vérifie en effet que $\alpha_q(0) = \alpha_p(s) = q$, et évidemment elle est une courbe inégrale (elle est obtenue à partir d'une courbe intégrale par une translation $t \to t + s$). En plus elle est maximale: si on pouvait étendre son domaine de définition, on pourrait faire la même chose avec α_p, et on aurait une contradiction. On voit donc que

$$\phi_t(\phi_s(p)) = \phi_t(\alpha_p(s)) = \phi_t(q) = \alpha_q(t) = \alpha_p(t+s) = \phi_{t+s}(p) \tag{7.67}$$

L'application ϕ définie par (7.65) s'appelle le *flot* du champ de vecteurs X. On peut montrer, en utilisant le théorème 7.6, que W est un ouvert, et que ϕ est différentiable C^∞.

Proposition 7.15. Si X est un champ de vecteurs complet, son flot ϕ est un groupe uniparamétrique de transformations.

Démonstration: Si X est complet, on a que $W = \mathbb{R} \times M$. Les autres conditions pour un groupe uniparamétrique de transformations sont déjà remplies. □

Exemple 7.16. Dans l'exemple 7.11, on a

$$W = \{(t, a) \in \mathbb{R} \times M : t \in J(a)\} = \{(t, a) \in \mathbb{R} \times M : 1 - ta > 0\} \tag{7.68}$$

et

$$\begin{aligned} \phi &: W \to \mathbb{R} \\ (t, a) &\mapsto \phi(t, a) = \frac{a}{1 - at} \end{aligned} \tag{7.69}$$

7.2 Champs de vecteurs et dérivations

Définition 7.17. Soir R un anneau commutatif, $\mathcal{A}$ une algèbre sur R. Une *dérivation* d'$\mathcal{A}$ est une application

$$D : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \tag{7.70}$$

qui vérifie

$$\begin{aligned} D(f + g) &= D(f) + D(g), \quad \forall f, g \in \mathcal{A}, \\ D(\lambda f) &= \lambda D(f), \quad \forall \lambda \in R,\ f \in \mathcal{A} \\ D(fg) &= D(f)g + fD(g), \quad \forall f, g \in \mathcal{A}. \end{aligned} \tag{7.71}$$

L'espace de fonctions différentiables sur M, $\mathcal{F}(M)$, est une algèbre sur $\mathbb{R}$. L'ensemble des dérivations de $\mathcal{F}(M)$ se dénote

$$\mathcal{D}(M) = \{D : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M) :\ D \text{ dérivation}\} \tag{7.72}$$

Il a une structure naturelle d'espace vectoriel réel, et de $\mathcal{F}(M)$-module, car si $f \in \mathcal{F}(M)$ et $D \in \mathcal{D}(M)$, on a

$$\begin{aligned} fD &: \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M), \\ h &\mapsto (fD)(h) = fD(h). \end{aligned} \tag{7.73}$$

Les dérivations sont des opérateurs locales. Pour montrer cela, on a besoin du résultat suivant:

Proposition 7.18. (Existence d'extensions globales) Soit M une variété différentiable, W un ouvert en M,

$$h : W \to \mathbb{R} \tag{7.74}$$

une application différentiable, et $p \in W$. Il existe un voisinage ouvert de p, $V \subset W$, et une fonction différentiable

$$g : M \to \mathbb{R} \tag{7.75}$$

tel que

$$g|_V = h_V, \qquad g|_{M\setminus W} = 0 \tag{7.76}$$

Lemme 7.19. *Soit M une variété différentiable, $p \in M$, et*

$$f, g : M \to \mathbb{R} \tag{7.77}$$

deux applications différentiables. Si f et g coincident dans un voisinage de p, on a que $D(f)(p) = D(g)(p)$.

Démonstration: On suppose qu'il y a un voisinage ouvert W de p avec $f|_W = g|_W$. Donc, si $h = f - g$, on a que $h|_W = 0$. On va maintenant montrer que $Dh(p) = 0$. Par l'existence d'extensions globales, il existe un voisinage ouvert $V \subset W$ et une fonction différentiable

$$\alpha : M \to \mathbb{R} \tag{7.78}$$

qui satisfait:

$$\alpha|_V = 1, \qquad \alpha|_{M\setminus W} = 0 \tag{7.79}$$

La fonction

$$\beta = 1 - \alpha \tag{7.80}$$

satisfait donc

$$\beta|_V = 0, \qquad \beta|_{M\setminus W} = 1 \tag{7.81}$$

On considère maintenant

$$\beta h = h \in \mathcal{F}(M), \tag{7.82}$$

car si $m \in W$, on a que $h(m) = 0 = \beta(m)h(m)$, et si $m \in M\setminus W$, on a $\beta(m) = 1$. On conclut que

$$Dh(p) = D(\beta h)(p) = (D\beta)(p)h(p) + \beta(p)(Dh)(p) = 0 \tag{7.83}$$

car $\beta(p) = h(p) = 0$. Mais

$$Dh(p) = Df(p) - Dg(p) = 0 \Rightarrow Df(p) = Dg(p). \tag{7.84}$$

□

De la même façon que l'on avait identifié $T_p(M)$ et $\mathcal{D}(p)$, on peut identifier $\mathcal{D}(M)$ avec $\mathcal{X}(M)$. On définit la correspondence

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(M) &\to \mathcal{D}(M) \\ X &\mapsto D_X \end{aligned} \tag{7.85}$$

où

$$\begin{aligned} D_X : \mathcal{F}(M) &\to \mathcal{F}(M) \\ f &\mapsto D_X(f) = X(f) \end{aligned} \tag{7.86}$$

On peut prouver que cette correspondence est bijective, i.e. toute dérivation vient d'un champ de vecteurs.

Définition 7.20. Soient D_1, $D_2 \in \mathcal{D}(M)$. On appelle *crochet de Lie*

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1. \tag{7.87}$$

Le crochet de Lie définit une dérivation dans $\mathcal{D}(M)$. En effet,

$$\begin{aligned}
[D_1, D_2]\,(fg) &= D_1(D_2(fg)) - D_2(D_1(fg)) = D_1\,(D_2(f)g + fD_2(g)) - D_2\,(D_1(f)g + fD_1(g)) \\
&= (D_1D_2)(f)g + D_2(f)D_1(g) + D_1(f)D_2(g) + f(D_1D_2)(g) \\
&- (D_2D_1(f))g - D_1(f)D_2(g) - D_2(f)D_1(g) - f(D_2D_1)(g) \\
&= (D_1D_2)(f)g - (D_2D_1(f))g + f(D_1D_2)(g) - f(D_2D_1)(g) \\
&= ([D_1, D_2])\,(f)g + f\,([D_1, D_2])\,(g)
\end{aligned} \tag{7.88}$$

On voit très bien que la composition $D_1 \circ D_2$ ne satisfait la règle de Leibniz, mais le crochet oui.

Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs a les propriétés suivantes

1. Anticommutativité:
$$[D_1, D_2] = -[D_2, D_1]. \tag{7.89}$$
2. Identité de Jacobi,
$$[D_1, [D_2, D_3]] + [D_2, [D_3, D_1]] + [D_3, [D_1, D_2]] = 0 \tag{7.90}$$

Ces deux propriétés definissent une *algèbre de Lie*, donc $\mathcal{D}(M)$ est une algèbre de Lie (sur $\mathbb{R}$).

Comme on a une identification $\mathcal{X}(M) \simeq \mathcal{D}(M)$, on peut définir le crochet aussi pour les champs de vecteurs:

$$\begin{aligned}
[X, Y] : M &\to T(M) \\
p &\mapsto [X, Y](p) \in T_p(M)
\end{aligned} \tag{7.91}$$

et

$$[X, Y](p)(h) = X_p(Yh) - Y_p(Xh), \qquad h \in F(p). \tag{7.92}$$

Ici, Xh, Yh sont deux fonctions définis dans le voisinage ouvert W de p où h est définie:

$$(Xh)(m) = X_m(h), \qquad m \in W. \tag{7.93}$$

8. Champs de tenseurs et formes différentielles

8.1 Algèbre tensorielle

On commence avec un petit rappel d'algèbre tensoriel.

Définition 8.1. Soient $V_1, \cdots, V_n$, W des espaces vectoriels. Une application

$$f : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to W \tag{8.1}$$

est multilinéaire si elle satisfait

$$\begin{aligned}
f(u_1, \cdots, u_i + u_i', \cdots, u_n) &= f(u_1, \cdots, u_i, \cdots, u_n) + f(u_1, \cdots, u_i', \cdots, u_n), \\
f(u_1, \cdots, \lambda u_i, \cdots, u_n) &= \lambda f(u_1, \cdots, u_i, \cdots, u_n),
\end{aligned} \tag{8.2}$$

pour tout $u_j \in V_j$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \cdots, n\}$. L'espace des applications multilinéaires de ce type a une structure naturelle d'espace vectoriel.

Si $W=\mathbb{R}$, l'espace des applications multilinéaires est répresenté par

$$V_1^\star \otimes \cdots \otimes V_n^\star \tag{8.3}$$

Définition 8.2. (*Produit tensoriel*) Soient $f \in V_1^\star \otimes \cdots \otimes V_n^\star$, $g \in W_1^\star \otimes \cdots \otimes W_m^\star$. On définit

$$\begin{aligned} f \otimes g : V_1 \times \cdots \times V_n \times W_1 \times \cdots \times W_m &\to \mathbb{R} \\ (v_1, \cdots, v_n, w_1, \cdots, w_m) &\mapsto f(v_1, \cdots, v_n) g(w_1, \cdots, w_m) \end{aligned} \tag{8.4}$$

Il s'agit d'une application multilinéaire, i.e. $f \otimes g \in V_1^\star \otimes \cdots \otimes V_n^\star \otimes W_1^\star \otimes \cdots \otimes W_m^\star$. Le produit tensoriel vérifie

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2) \otimes g &= f_1 \otimes g + f_2 \otimes g, \\ (\lambda f) \otimes g &= f \otimes (\lambda g) = \lambda (f \otimes g), \\ (f \otimes g) \otimes h &= f \otimes (g \otimes h) \equiv f \otimes g \otimes h. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Comme $V \simeq (V^\star)^\star$, on peut définir

$$V_1 \otimes V_2 = \{x \otimes y : x \in V_1, \quad y \in V_2\}, \tag{8.6}$$

où

$$\begin{aligned} x \otimes y : V_1^\star \times V_2^\star &\to \mathbb{R} \\ (\phi_1, \phi_2) &\mapsto \phi_1(x) \phi_2(y) \end{aligned} \tag{8.7}$$

Si $\{e_i^k\}_{i=1,\cdots,\dim(V_k)}$ est une base de V_k, on peut voir facilement qu'une base de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ est

$$\left\{e_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{i_n}^n\right\}_{1 \leq i_1 \leq \dim(V_1), \cdots, 1 \leq i_n \leq \dim(V_n)} \tag{8.8}$$

Définition 8.3. Soit V un espace vectoriel de dimension n. Un *tenseur* de type (r,s) est un élément de l'espace

$$Z_s^r(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r} \otimes \underbrace{V^\star \otimes \cdots \otimes V^\star}_{s} \tag{8.9}$$

Il s'agit d'applications $(r+s)$-linéaires de l'espace

$$\underbrace{V^\star \times \cdots \times V^\star}_{r} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s} \tag{8.10}$$

en $\mathbb{R}$.

Soit $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ une base de V, et $\{\phi^i\}_{i=1,\cdots,n}$ la base dual de $V^\star$, avec

$$\phi^i(e_j) = \delta_j^i \tag{8.11}$$

Une base de $Z_s^r(V)$ est

$$\left\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \phi^{j_1} \otimes \cdots \otimes \phi^{j_s}\right\}_{1 \leq i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s \leq n} \tag{8.12}$$

et un élément de $Z_s^r(V)$ peut donc s'écrire comme

$$k = \sum_{1 \leq i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s \leq n} k_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \phi^{j_1} \otimes \cdots \otimes \phi^{j_s}. \tag{8.13}$$

Un rôle particulièrement important est joué par les tenseurs antisymétriques de type $(0, s)$. On définit

$$\Lambda^s(V) = \{k \in Z_s(V) : k \text{ antisymétrique}\} = \{k : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R} : k \text{ antisymétrique}\} \tag{8.14}$$

On dénotera aussi

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{s=0}^{n} \Lambda^s(V) \tag{8.15}$$

Une base de $\Lambda^s(V)$ est donnée par

$$\left\{\phi^{j_1} \wedge \cdots \wedge \phi^{j_s}\right\}_{1 \leq j_1 < \cdots < j_s \leq n} \tag{8.16}$$

où $\wedge$ est le produit extérieur. On écrira donc un élement de $\Lambda^s(V)$ comme

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_s \leq n} \omega_{j_1 \cdots j_s} \phi^{j_1} \wedge \cdots \wedge \phi^{j_s} \tag{8.17}$$

8.2 Fibrés tensoriels et champs de tenseurs

Soit M une variété différentiable de dimension n, $p \in M$. On peut considérer le produit tensoriel

$$T_p(M)^r_s = \underbrace{T_p(M) \otimes \cdots \otimes T_p(M)}_{r} \otimes \underbrace{T^\star_p(M) \otimes \cdots \otimes T^\star_p(M)}_{s} \tag{8.18}$$

On définit maintenant le fibré tensoriel

$$T(M)^r_s = \bigcup_{p \in M} T_p(M)^r_s. \tag{8.19}$$

On peut montrer qu'il s'agit d'un fibré vectoriel sur M avec fibre $\mathbb{R}^{n^{r+s}}$ et projection

$$\begin{aligned} \pi : T(M)^r_s &\to M \\ k &\mapsto \pi(k) = p \text{ si } k \in T_p(M)^r_s. \end{aligned} \tag{8.20}$$

Soit (U, ϕ) une carte locale. Une base de $T_p(M)^r_s$ est

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_p \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right)_p \otimes \left(\mathrm{d}x^{j_1}\right)_p \otimes \cdots \otimes \left(\mathrm{d}x^{j_s}\right)_p\right\}_{1 \leq i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s \leq n} \tag{8.21}$$

Les difféomorphismes de trivialité sont

$$\begin{aligned} &h_\phi : U \times \mathbb{R}^{n^{r+s}} \to \pi^{-1}(U) \\ &\left(p, \left(k^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}\right)\right) \mapsto \sum_{1 \leq i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s \leq n} k^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right) \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right) \otimes \left(\mathrm{d}x^{j_1}\right) \otimes \cdots \otimes \left(\mathrm{d}x^{j_s}\right) \end{aligned} \tag{8.22}$$

Remarque 8.4. On prend $T(M)^0_0 = M \times \mathbb{R}$, le fibré trivial avec fibre $\mathbb{R}$.

De la même façon, on peut définir le *fibré extérieur*

$$\Lambda^s(M) = \bigcup_{p\in M} \Lambda^s\left(T_p(M)\right) \tag{8.23}$$

où

$$T_p(M)^0_s \supset \Lambda^s(T_p(M)) = \{\omega : \underbrace{T_p(M)\times\cdots\times T_p(M)}_{s} \to \mathbb{R} |\, \omega \text{ antisymétrique}\} \tag{8.24}$$

Il s'agit d'un fibré vectoriel sur M avec fibre $\mathbb{R}^{\binom{n}{s}}$. Finalement, le fibré algèbre extérieur est donné par

$$\Lambda(M) = \bigcup_{p\in M} \Lambda\left(T_p(M)\right) \tag{8.25}$$

avec

$$\Lambda\left(T_p(M)\right) = \bigoplus_{s=0}^{n} \Lambda^s(T_p(M)). \tag{8.26}$$

Il s'agit d'un fibré vectoriel sur M avec fibre $\mathbb{R}^{2^n}$. Si (U,ϕ) est une carte locale de M en p, $\phi = (x^1,\cdots,x^n)$, une base de $\Lambda^s(T_p(M))$ est

$$\left\{\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_s}\right\}_{1\le j_1<\cdots<j_s\le n} \tag{8.27}$$

Définition 8.5. Un champ de tenseurs de type (r,s) sur M est une section différentiable du fibré $T(M)^r_s$:

$$k : M \to T(M)^r_s \tag{8.28}$$

Une forme différentielle de degré s (ou s-forme) est une section différentiable

$$\omega : M \to \Lambda^s(M). \tag{8.29}$$

Une forme différentielle est une section différentiable

$$\omega : M \to \Lambda(M). \tag{8.30}$$

Remarque 8.6. Pour $r = s = 0$, une section est donnée par

$$\begin{aligned} \omega : M &\to M\times\mathbb{R} \\ p &\mapsto (p, f(p)) \end{aligned} \tag{8.31}$$

où $f : M \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable.

Si k est un champ de tenseurs et (U,ϕ) est une carte locale de M, pour tout $p\in U$ on a une expression locale

$$k_p = \sum_{1\le i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s\le n} k^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_p\otimes\cdots\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right)_p\otimes\left(\mathrm{d}x^{j_1}\right)_p\otimes\cdots\otimes\left(\mathrm{d}x^{j_s}\right)_p \tag{8.32}$$

On a donc une application différentiable

$$k^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} : U \to \mathbb{R} \tag{8.33}$$

et on dénotera

$$k|_U = \sum_{1\le i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s\le n} k^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right) \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right) \otimes \left(\mathrm{d}x^{j_1}\right) \otimes \cdots \otimes \left(\mathrm{d}x^{j_s}\right) \tag{8.34}$$

De la même façon, si ω est une s-forme, et (U, ϕ) est une carte locale, on a une expression locale

$$\omega|_U = \sum_{j_1<\cdots<j_s} \omega_{j_1\cdots j_s} \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_s}. \tag{8.35}$$

8.3 Formes différentielles

On va maintenant se concentrer sur les formes différentielles. On dénotera $E^s(M)$ l'espace des formes différentielles de degré s sur M. Avec la somme et la multiplication par scalaires, il a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Avec la somme et la multiplication par des fonctions $f \in \mathcal{F}(M)$, il a une structure de $\mathcal{F}(M)$-module. On dénotera aussi

$$E(M) = \bigoplus_{s=0}^{n} E^s(M), \tag{8.36}$$

où n est la dimension de M.

C'est facile à voir que toute forme différentielles définit une application antisymétrique

$$\omega : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \cdots \mathcal{X}(M)}_{s} \to \mathcal{F}(M) \tag{8.37}$$

définie par

$$\omega(X_1, \cdots, X_s)(p) = \omega_p(X_{1p}, \cdots, X_{sp}). \tag{8.38}$$

On peut aussi prouver la réciproque, i.e. que toute application de la forme (8.37) définit une forme différentielle. Donc, on peut utiliser les deux descriptions de façon équivalente.

Exemple 8.7. Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Sa différentielle

$$\mathrm{d}f : M \to T^*(M) \tag{8.39}$$

qui agit comme

$$(\mathrm{d}f)_p : T_p(M) \to \mathbb{R} \tag{8.40}$$

est une 1-forme. Sur les champs de vecteurs elle agit comme

$$\mathrm{d}f(X)(p) = X_p(f) = (Xf)(p). \tag{8.41}$$

Si (U, ϕ) est une carte locale, l'expression locale de $\mathrm{d}f$ est

$$(\mathrm{d}f)_p = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p (\mathrm{d}x^i)_p \tag{8.42}$$

Soit maintenant $\omega in E^s(M)$, $\eta \in E^r(M)$. On définit $\omega \wedge \eta \in E^{s+r}(M)$ comme la forme qui au point p vaut

$$(\omega \wedge \eta)_p = \omega_p \wedge \eta_p : \underbrace{T_p(M) \times \cdots \times T_p(M)}_{r+s} \to \mathbb{R}. \tag{8.43}$$

Considéré comme une fonction de $r+s$ champs vectoriels, on a

$$
\begin{aligned}
&(\omega \wedge \eta)\left(X_1, \cdots, X_s, X_{s+1}, \cdots, X_{s+r}\right) \\
&\quad = \frac{1}{s!r!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \epsilon(\sigma) \omega_p\left(X_{\sigma(1)p}, \cdots, X_{\sigma(s)p}\right) \eta_p\left(X_{\sigma(s+1)p}, \cdots, X_{\sigma(s+r)p}\right).
\end{aligned} \tag{8.44}
$$

Ici, la somme est sur toutes les permutations σ du groupe de permutations de $s+r$ éléments, S_{s+r}, et $\epsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ. Avec le produit extŕerieur, l'espace $E(M)$ devient une algèbre graduée.

Exemple 8.8. Soit $\omega \in E^1(M)$, $\eta \in E^2(M)$. On a

$$
\begin{aligned}
(\omega \wedge \eta)(X_1, X_2, X_3) = \frac{1}{1!2!}\Big(& \omega(X_1)\eta(X_2, X_3) - \omega(X_1)\eta(X_3, X_2) - \omega(X_2)\eta(X_1, X_3) \\
&+ \omega(X_2)\eta(X_3, X_1) + \omega(X_3)\eta(X_1, X_2) - \omega(X_3)\eta(X_2, X_1)\Big) \\
= \omega(X_1)\eta(X_2, X_3) &- \omega(X_2)\eta(X_1, X_3) + \omega(X_3)\eta(X_1, X_2).
\end{aligned} \tag{8.45}
$$

Soit $f : M \to N$ une application différentiable. Pour tout $p \in M$ on a une application linéaire

$$
f_{\star p} : T_p(M) \to T_{f(p)}(N) \tag{8.46}
$$

qui induit une application duale

$$
\begin{aligned}
f_p^\star : T^\star_{f(p)}(N) &\to T_p^\star(M) \\
\omega &\mapsto \omega \circ f_{\star p}
\end{aligned} \tag{8.47}
$$

Donc,

$$
\left(f_p^\star(\omega)\right)(X_p) = \omega\left(f_{\star p}(X_p)\right), \qquad \omega in T^\star_{f(p)}(N). \tag{8.48}
$$

Cette construction peut être généralisée à

$$
f_p^\star : \Lambda^s\left(T^\star_{f(p)}(N)\right) \to \Lambda^s\left(T_p^\star(M)\right) \tag{8.49}
$$

comme

$$
\left(f_p^\star \omega\right)(v_1, \cdots, v_s) = \omega\left(f_{\star p}(v_1), \cdots, f_{\star p}(v_s)\right), \qquad v_i \in T_p(M), \quad \omega \in \Lambda^s\left(T^\star_{f(p)}(N)\right). \tag{8.50}
$$

Cette application s'etend par linéarité à une application

$$
f_p^\star : \Lambda\left(T^\star_{f(p)}(N)\right) \to \Lambda\left(T_p^\star(M)\right) \tag{8.51}
$$

et elle vérifie

$$
f_p^\star(\omega \wedge \eta) = \left(f_p^\star \omega\right) \wedge \left(f_p^\star \eta\right) \tag{8.52}
$$

i.e. c'est un homomorphisme d'algèbres.

On peut maintenant utiliser cette application pour construire une application

$$
f^\star : E^s(N) \to E^s(M). \tag{8.53}
$$

Comme fonction évaluée sur des champs des vecteurs, elle est donnée par

$$
(f^\star \omega)(X_1, \cdots, X_s)(p) = (f^\star \omega)_p\left(X_{1p}, \cdots, X_{sp}\right) \tag{8.54}
$$

Définition 8.9. Soit D un opérateur linéaire de $E(M)$. On dit que D est une dérivation si

$$D(\omega\wedge\eta) = D(\omega)\wedge\eta + \omega\wedge D(\eta), \qquad \forall\omega,\eta\in E(M), \tag{8.55}$$

et une anti-dérivation si

$$D(\omega\wedge\eta) = D(\omega)\wedge\eta + (-1)^s\omega\wedge D(\eta), \qquad \forall\omega\in E^s(M),\eta\in E(M). \tag{8.56}$$

On dit que D est un opérateur de degré k si $D(\omega)\in E^{s+k}(M)$, $\forall\omega\in E^s(M)$.

Définition 8.10. Un opérateur linéaire $D : E(M)\to E(M)$ est un *opérateur local* si pout tout ouvert $U\subset M$, on a

$$\omega,\eta\in E(M), \quad \text{avec} \quad \omega|_U = \eta|_U \Rightarrow (D\omega)|_U = (D\eta)|_U. \tag{8.57}$$

Proposition 8.11. Les (anti)-dérivations sont des opérateurs locaux. En plus, si $D : E(M)\to E(M)$ est une (anti)-dérivation, pour tout ouvert $U\subset M$ il existe une (anti)-dérivation unique

$$D_U : E(U)\to E(U) \tag{8.58}$$

tel que

$$(D\omega)|_U = D_U\left(\omega|_U\right), \qquad \forall\omega\in E(M). \tag{8.59}$$

Une fois établi le caractère local des (anti)-dérivations, on peut prouver le théorème suivant:

Théorème 8.12. *Deux (anti)-dérivations sont identiques si elles coincident quand elles agissent sur les fonctions et les différentielles des fonctions.*

On définit maintenant les deux anti-dérivations fondamentales sur une variété:

Définition 8.13. (*Produit intérieur*). Soit $X\in\mathcal{X}(M)$. On définit l'anti-dérivation de degré -1

$$\iota_X : E(M)\to E(M) \tag{8.60}$$

comme suit. Pour $f\in\mathcal{F}(M)$,

$$\iota_X(f) = 0, \qquad \iota_X(\mathrm{d}f) = X(f) = \mathrm{d}f(X). \tag{8.61}$$

Pour les formes de degré $s\geq 2$, on définit

$$\iota_X(\omega) : \underbrace{\mathcal{X}(M)\times\cdots\times\mathcal{X}(M)}_{s-1}\to\mathcal{F}(M) \tag{8.62}$$

comme

$$\iota_X(\omega)(X_1,\cdots,X_{s-1}) = \omega(X,X_1,\cdots X_{s-1}) \tag{8.63}$$

Théorème 8.14. *(Différentielle extérieure). Il existe une unique anti-dérivation de degré* 1

$$\mathrm{d} : E(M)\to E(M) \tag{8.64}$$

tel que

1. $\mathrm{d}f$ *est la différentielle de* f

2. $\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0$

Si

$$\omega = \sum_{j_1 < \cdots < j_s} \omega_{j_1 \cdots j_s} \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_s} \in E^s(\mathbb{R}^n), \tag{8.65}$$

cette différentielle est donnée par

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{j_1 < \cdots < j_s} \mathrm{d}\omega_{j_1 \cdots j_s} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_s} \in E^{s+1}(\mathbb{R}^n) \tag{8.66}$$

Avec ces deux anti-dérivations, on peut définir la dérivée de Lie sur les formes:

Définition 8.15. (*Dérivée de Lie*) Soit $X \in \mathcal{X}(M)$. On définit

$$\mathcal{L}_X : E(M) \to E(M) \tag{8.67}$$

par

$$\mathcal{L}_X = \mathrm{d} \circ \iota_X + \iota_X \circ \mathrm{d}. \tag{8.68}$$

Il s'agit d'une dérivation de degré zero.

References

[1] W. M. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, Second Edition, Academic Press, 2003.